

Theoretische Analyse des
Druck- und Geschwindigkeitsfeldes
eines schrägdurchströmten Stabbündels
als Grundlage zur
Quasi-Kontinuums-Theorie

Dissertation
zur Erlangung des Grades
Doktor-Ingenieur
der Abteilung für Maschinenbau
der Ruhr-Universität Bochum

von

Martin Basler
aus Horb / Neckar

Bochum 1984



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546428_0010

Theoretische Analyse des
Druck- und Geschwindigkeitsfeldes
eines schrägdurchströmten Stabbündels
als Grundlage zur
Quasi-Kontinuums-Theorie

Dissertation
zur Erlangung des Grades
Doktor-Ingenieur
der Abteilung für Maschinenbau
der Ruhr-Universität Bochum

von

Martin Basler
aus Horb / Neckar

Bochum 1984

Dissertation eingereicht am :
Tag der mündlichen Prüfung :

14. November 1984
14. Dezember 1984

Referent :
Korreferent :

Prof. Dr. rer. nat. A. Ziegler
Prof. Dr.-Ing. H. Pfost

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl für Reaktortechnik der Ruhr-Universität Bochum.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. rer. nat. A. Ziegler für seine wertvollen Anregungen und seine fördernde Unterstützung sowie für den großzügigen Freiraum zu eigener Initiative.

Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Pfost danke ich für sein wohlwollendes Interesse an dieser Studie und für die freundliche Übernahme des Korreferates.

Ferner möchte ich mich bei allen Mitarbeitern des Lehrstuhls bedanken, die durch ihre stetige Hilfsbereitschaft zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Bochum, Dezember 1984

Martin Bessler

Übersicht

Die vorliegende Arbeit beschreibt die wesentlichen Beiträge, die das Widerstandsverhalten einer Stabgitterströmung bestimmen. Das Ziel der aufgezeigten Vorgehensweise besteht darin, letztlich einfach auswertbare Zusammenhänge zwischen dem resultierenden Druckgradienten und einer über die Geometrie definierten Bezugsgeschwindigkeit $\vec{u}$ zu erhalten.

Mit Hilfe der so gewonnenen Funktionen - die sich in die Methodik der Quasi-Kontinuums-Theorie übernehmen lassen - können akzeptierbare Näherungslösungen für strömungsmechanisch komplizierte Verhältnisse erreicht werden.

Ausgangspunkt der durchgeführten Feinstrukturanalyse ist die ebene Lösung der Geschwindigkeitsverteilung in einer typischen Stabgitterzelle, die auf der Basis von Potential- und Grenzschicht-Theorie approximiert wird. Eine Integration der Druck- und Schubspannungsverteilung über die umströmte Strukturoberfläche definiert Widerstandsbeiwerte $\xi(\theta, Re)$, in denen alle relevanten Geometrie- und Strömungsparameter verknüpft sind. In Verbindung mit dem durch Wirbelpaare modellierten Ablösegebiet bilden diese Daten einen Informationsvorrat für eine Variationsrechnung, die die wesentlichen Verhältnisse im schrägangeströmten Bündel simuliert.

Die durchgeführten Vergleichsrechnungen bestätigen die Brauchbarkeit der zugrundeliegenden Modellvorstellung, da die theoretisch gefundenen Ergebnisse eine gute Übereinstimmung mit den experimentell beobachteten Phänomenen aufweisen.

1.	<u>Einleitung</u>	
1.1	Einführung in die Problemstellung	1
1.2	Begründung der Vorgehensweise	7
2.	<u>Grenzschichttheorie</u>	
2.1	Physikalische Voraussetzungen (Gültigkeitsbereich)	8
2.2	Grenzschichtverhalten im Stabgitter	13
2.3	Integralverfahren	19
2.3.1	Charakteristische Grenzschichtgrößen	19
2.3.2	Integrale Basisgleichungen (laminar / turbulent) - Lösungsweg :	22
2.3.3	Ansätze für Geschwindigkeitsformparameter, Schubspannung und Dissipationsintegral	27
2.3.4	Stabilitätskriterium für den Grenzschichtumschlag laminar / turbulent	31
2.3.5	Staupunktbedingungen	34
2.4	Hinweise zur stabilen numerischen Integration	36
3.	<u>Potentialtheorie</u>	
3.1	Mathematisch-physikalische Eigenschaften der Potentialströmung	41
3.2	Das komplexe Potential der Strömung im Stabgitter	45
3.3	Potential-theoretische Simulation des Ablösegebietes	56

	Seite
4. <u>Auswertung des Impulsintegrals</u>	
4.1 Physikalische Analyse der Einzelbeiträge	63
4.2 Mathematische Auswertung der Oberflächenintegrale $\int \sigma_{ij} \vec{n}_j \, dA$ im Kontrollraum für beliebige Anströmwinkel θ	72
4.3 Zusammenhang zwischen Widerstandsbeiwert $c_w(\theta, Re)$ und Druckverlustbeiwert $\xi(\theta, Re)$ im Stabbündel	87
5. <u>Simulation von Druck- und Geschwindigkeitsfeld im schrägangeströmten Stabgitter</u>	92
5.1 Physikalische Interpretation von experimentell gefundenen Phänomenen auf der Basis eines Variationsmodells	92
5.2 Theoretische Modellierung der Dissipationsvorgänge im Ablösegebiet	100
5.3 Bewertender Vergleich zwischen theoretischen Näherungslösungen und experimentell gefundenen Korrelationen	110
6. <u>Diskussion und bewertende Zusammenfassung der Ergebnisse</u>	
6.1 Widerstandsverhalten im Stabgitter	119
6.2 Einzelheiten in der Zelle	122
6.3 Schlußfolgerungen und Perspektiven	126

Anhang

- graphische Darstellung der wichtigsten Ergebnisse
- Bilder- und Tabellenverzeichnis
- Literaturreferenzen

1. Einleitung

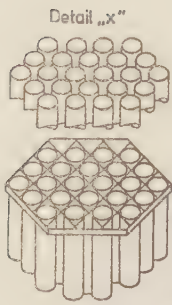
1.1 Einführung in die Problemstellung

Die Anregung zu der vorliegenden Arbeit entstand im Rahmen einer thermo-hydraulischen Analyse des in Bild 1.1 schematisch dargestellten "offenen" Kern-Konzeptes für schnelle Brutreaktoren. Dieser - von ZIEGLER /1/ vorgeschlagene Entwurf - sieht vor, durch Wegfall der Brennelement-Kästen (= "offenes" Core) die parasitäre Neutronenabsorption zu verringern und damit über die günstigere Neutronenökonomie den Brennstoffeinsatz bzw. die Brutrate zu verbessern. Die 3-dimensionale Leistungsdichteverteilung, die in Bild 1.1 mitaufgeführt ist, resultiert aus einer neutronen-physikalischen Rechnung, bei der LOER / 8 / die erwarteten physikalischen Vorteile quantitativ bestätigen konnte. Weiterreichende konstruktive, thermodynamische, sicherheitsrelevante und wirtschaftliche Aspekte, die eine Entwicklung dieses Konzeptes befürworten, sind in den Ausführungen von /2/ diskutiert und begründet.

Die radial stark unterschiedlichen Leistungstraversen mit den typischen, steil abfallenden Flanken am Rand der Spaltzone, verlangen eine Kühlmittelführung durch den Kern, die dieser Leistungscharakteristik angepaßt ist. Zu diesem Zweck sind teildurchlässige Schikanen vorgesehen, die das Fluid mäanderförmig durch den Kern führen. Die verstellbare Drossel im Ringraum erlaubt darüberhinaus eine Anpassung des Strömungsfeldes an die mit zunehmender Standzeit der Brutelemente sich erhöhende Leistungsfreisetzung im radialen Blanket.

Für die thermo-hydraulische Auslegung des Kerns - mit dem anzustrebenden Ziel einer möglichst gleichmäßigen Austrittstemperatur - kommt daher der Beschreibung und Lösung des vorliegenden Strömungsproblems eine zentrale Bedeutung zu.

In Anbetracht der vorliegenden Re-Zahlen von 10^4 - 10^5 , verbunden mit den Turbulenz- und Ablöseerscheinungen in den engen Kanälen der durchströmten Gitterstruktur kann ein Lösungsversuch auf der Basis der 3-dimensionalen Bewegungsgleichungen unter den gegebenen Randbedingungen von vornherein ausgeschlossen werden.



REAKTORKERN
schematisch

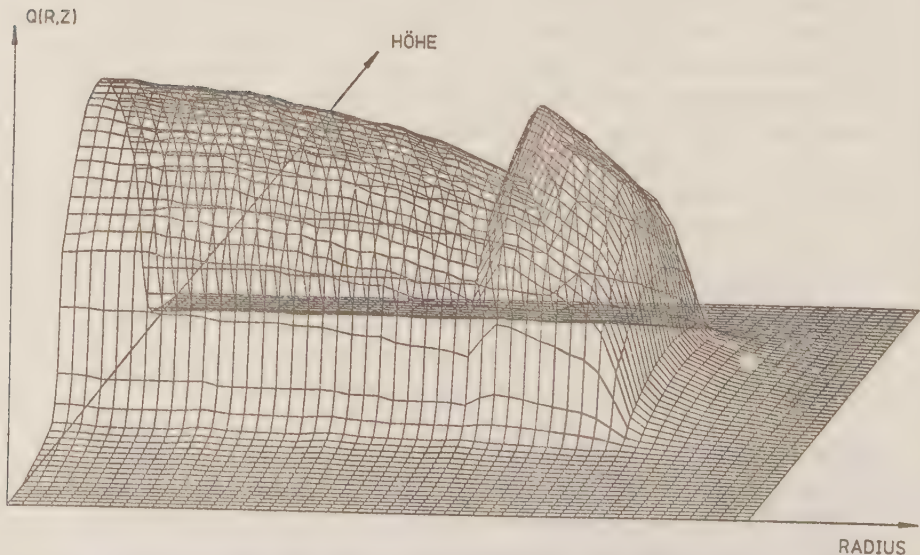
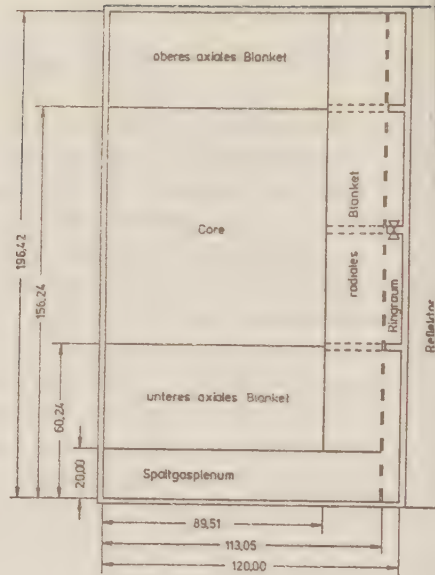
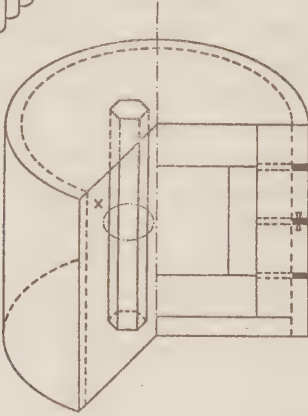
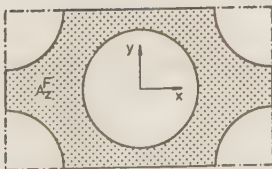
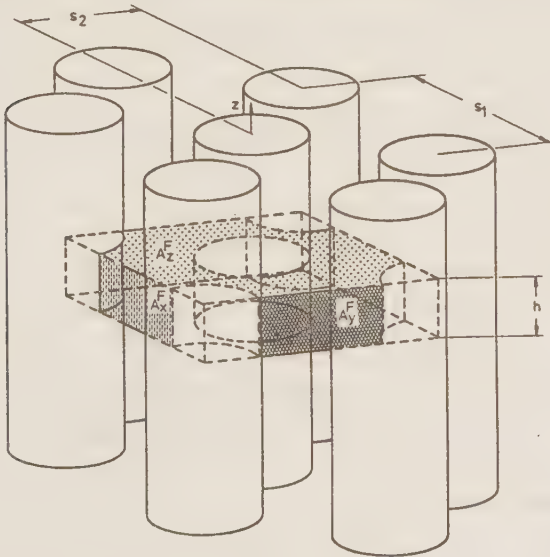


Bild 1.1 Prinzipskizze des "offenen" Kernkonzeptes
3-dimensionale Leistungsdichteverteilung $Q(r,z)$

Einen Ausweg bietet die Methodik der Quasi-Kontinuums-Theorie, die - unter bestimmten, noch zu diskutierenden Voraussetzungen - einen Zugang in das beschriebene Problem erlaubt und insbesondere für die technische Praxis akzeptierbare Näherungslösungen ermöglicht.

Der "homogenisierende" Grundgedanke dieser Theorie verzichtet auf die Beschreibung jeder Einzelheit im Fluid, sondern befriedigt vielmehr die Kontinuität-, Impuls- und Energiebilanzen im Mittel über ein charakteristisches finites Volumenelement.

Die Basisgleichungen sind in der neueren Literatur /14, 15/ ausführlich abgeleitet und begründet, so daß die etwas übersichtlicheren Integralformen der Ausgangsgleichungen herangezogen werden können, wobei die Bezeichnungen in Bild 1.2 erläutert sind.



V = Kontrollvolumen im Stabbindel

V_f = Fluidvolumen in V

A = Kontrollraumoberflächen (A_x , A_y , A_z)

A_f = Fluidanteil von A_i (A_x^F , A_y^F , A_z^F)

A_{fs} = Fluid-Struktur-Grenzfläche

$$\gamma = \frac{V_f}{V} ; \text{ hier: } \gamma_{A_i} = \frac{A_{fi}}{A_i} = \gamma_V = \gamma = \text{const}$$

Bild 1.2

Für die Massen- bzw. Impulsbilanzierung im eingezeichneten Kontrollvolumen einer Stabgitterzelle findet man /16/ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \gamma \, dV + \int_A \rho w_1 n_1 \gamma \, dA = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho w_1 \gamma \, dV + \oint_A \rho w_1 w_j n_j \gamma \, dA =$$

$$\int_V \rho \sigma_i \gamma \, dV + \int_A \sigma_{ij} n_j \, dA \quad (1.2)$$

Der letzte Integralausdruck von 1.2 läßt sich formal trennen (vgl. 4.15). Man erhält zunächst ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Gleichung 1.3 :

$$\begin{aligned} \int_A \sigma_{ij} n_j \, dA &= \int_{A_f + A_{fs}} \sigma_{ij} n_j \, dA = - \int_{A_f} p n_1 \, dA + \int_{A_f} \tau_{ij} n_j \, dA \\ &\quad - \int_{A_{fs}} p n_1 \, dA + \int_{A_{fs}} \tau_{ij} n_j \, dA \quad (1.3) \end{aligned}$$

Für eine einfachere Schreibweise wird zunächst eine Widerstandsfunktion R_i definiert, die die Beiträge an den Strukturoberflächen im Kontrollvolumen der betrachteten Zelle zusammenfaßt :

$$\int_V R_i \gamma \, dV = : \int_{A_{fs}} (p n_1 - \tau_{ij} n_j) \, dA \quad (1.4)$$

Der Schubspannungsterm $\int \tau_{ij} n_j \, dA$ an den fluid-internen Flächen A_f darf hier gegenüber dem Impulsverlust an den vielen Staboberflächen vernachlässigt werden, d.h. mit der im Stabgitter zulässigen Voraussetzung :

$$\int_{A_f} \tau_{ij} n_j \, dA \ll \int_V R_i \gamma \, dV \quad (1.5)$$

sind alle dominanten Terme für das oben beschriebene Strömungsproblem erfaßt. Die Impulsbilanzierung 1.2 läßt sich demnach wie folgt formulieren :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho w_i \gamma dV + \oint_A \rho w_i w_j n_j \gamma dA = \int_V \rho g_i \gamma dV - \int_{A_f} p n_i dA - \int_V R_i \gamma dV \quad (1.6)$$

Im Gegensatz zu den Navier-Stokes-Gleichungen, die jedes Teilchen an jeder Stelle im Fluid bilanzieren, hebt die Integration über die Zelle die Gleichungen aus der Feinstruktur heraus. Konsequenterweise gelten diese Bilanzen also sowohl für die einzelne Zelle wie auch für den Reaktorkern als Ganzes. Die Lösung "sieht" demnach nicht mehr die diskrete Struktur, sondern "erfährt" ihre Wechselwirkung mit dem Fluid über die zusätzlich auftretenden Widerstandsterme R_i . Konsequenterweise erübrigt sich dann auch die Forderung der Haftbedingung, da alle in der Grenzschicht ablaufenden Vorgänge in den Reibungstermen R_i schon erfaßt sind und die Randbedingungen an der Begrenzung des Integrationsgebietes durch sog. "slip-conditions" beschrieben werden.

Dieser Umstand führt letztlich auf eine mathematische Form der Bewegungsgleichungen, die sich auf die Numerik - und damit auf die Lösbarkeit überhaupt - fundamental auswirkt : Das Viskositätsglied - das in den strengen Bewegungsgleichungen durch partielle Ableitungen zweiter Ordnung beschrieben wird - entfällt und damit auch das diametrale Stabilitätsverhalten der Terme erster und zweiter Ordnung.

Der gewonnene mathematische Vorteil - also das Erniedrigen der Differentialgleichung um eine Ordnung, das mit dem "Nichterfüllen" der Haftbedingung korrespondiert - bedeutet aber nur dann einen Fortschritt im Sinne der gewünschten Lösbarkeit, wenn die dafür hinzugekommenen Widerstandsfunktionen R_i bekannt sind.

Insofern ist die Güte der erzielbaren Lösung direkt von der Brauchbarkeit dieser Terme abhängig, da die Theorie des Quasi-Kontinuums lediglich ihre physikalische Bedeutung über Gl. 1.4 präzisiert, aber keine praktisch auswertbare Formulierung liefert.

Aus dieser Beschreibungslücke entstand letztlich die Motivation zu der vorliegenden Studie, mit dem Ziel, diese Widerstandsfunktionen R_1 bzw. das Widerstandsverhalten im Stabgitter und die im Experiment beobachteten Strömungsfelder in ihren wesentlichen Zügen theoretisch zu bestimmen.

Bei Vorgabe dieser Funktionen ergibt sich mit 1.1 und 1.6 in differentieller Schreibweise ein Satz gekoppelter, partieller Differentialgleichungen, deren Lösung in Zusammenarbeit mit BENTE /3/ für den beschriebenen "offenen" Kern gelungen ist. /2/. Der im Programm eingesetzte Ansatz berücksichtigt in der von ZIEGLER /1/ vorgeschlagenen Form : $|u| \zeta_{ij} u_j$ die grundsätzlichen physikalischen Forderungen, wobei durch die tensorielle Größe ζ der anisotropen Widerstandscharakteristik des Stabgitters Rechnung getragen wird. Die Belegung sowie die experimentell festgestellte Winkel- und Re-Abhängigkeit der Elemente von ζ wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit noch eingehend diskutiert und den theoretischen Ergebnissen gegenübergestellt.

Der derzeitige Kenntnisstand in der Literatur über das Widerstandsverhalten von Stabgitteranordnungen trägt überwiegend einen "phänomenologisch" beschreibenden Charakter. Die angegebenen empirischen Korrelationen konzentrieren sich auf senkrecht bzw. parallel angeströmte Stabbündel, während die Verhältnisse bei Schräganströmung noch kaum erforscht sind. Theoretische Vorstöße in die beschriebene Problematik sind nicht bekannt. GADDIS und GNIELINSKI, die für die VDI-Ausgabe 1984 alle im Schrifttum bekannten Meßwerte aus senkrecht angeströmten Stabgittern zu neuen Berechnungsgleichungen korrelierten, stellen fest :

"Der Druckverlustbeiwert hängt in einer unbekannten Weise vom Quer- und vom Längsteilungsverhältnis ab. Mit den gegenwärtigen Kenntnissen läßt sich diese Größe theoretisch nicht ermitteln. Die funktionelle Abhängigkeit von den Einflußgrößen muß daher experimentell bestimmt werden". /26/

1.2 Begründung der Vorgehensweise

Die angestrebte theoretische Beschreibung des Widerstandsverhaltens im Stabgitter setzt also entsprechend Gl. 1.4 die Kenntnis der Druck- und Schubspannungsverteilung an der umströmten Stabkontur voraus. Da diese Größen wiederum entsprechend den Aussagen der Bewegungsgleichungen mit dem Vektorfeld der Geschwindigkeitsverteilung gekoppelt sind, ist eine Feinstrukturanalyse der Stabgitterzelle unumgänglich.

Als grundlegende Voraussetzung für alle weiteren Betrachtungen werden die Stäbe als starr und ihre Oberflächen als hydraulisch glatt angenommen, sowie die Beiträge der turbulenten Schubspannung außerhalb der Grenzschicht vernachlässigt. Die Forderung nach feststehenden Stäben wird i.a. durch konstruktive Maßnahmen (z. B. Abstandshalter) ausreichend gewährleistet, so daß Resonanzerscheinungen infolge strömungsinduzierter Schwingungen ausgeschlossen werden können. Detaillierte Einzelheiten und experimentelle Ergebnisse dieses Komplexes im senkrecht- und schrägangeströmten Stabgitter sind in den Literaturreferenzen /18, 19, 20/ angegeben.

Die Angaben von GROEHN /21/ und HEINECKE /18/ verdeutlichen den untergeordneten Beitrag der Oberflächenbeschaffenheit, wonach im Bereich $Re \leq 10^5$ für verschiedene Rauigkeiten $k_s/D < 2 \cdot 10^{-3}$ keine Widerstandsänderungen im Rahmen der Meßgenauigkeit festgestellt werden konnte. Diese Ergebnisse decken sich im wesentlichen mit gezielten Schubspannungsmessungen $\tau(\phi)$ anderer Autoren, die für die Reibungsbeiträge eine Größenordnung zwischen 2 % und 5 % des Gesamtwiderstandes ermittelten /22, 23, 24, 25/.

Diese Daten begründen auch indirekt die in Gl. 1.5 vorweggenommene Abschätzung. Offensichtlich dominieren im Stabgitter die Ablöseerscheinungen und damit die Druckverteilung entlang der Kontur, so daß mit dem Integral von Gl. 1.5 der überwiegende Anteil des Impulsverlustes beschrieben ist.

Aus diesem Grund erscheint für die folgende Analyse die klassische Unterteilung in zwei asymptotisch ineinander übergehende Gebiete gerechtfertigt, wonach konsequenterweise die Außenströmung zwischen den Stäben reibungsfrei behandelt und der wandnahe Bereich über die Grenzschichttheorie erfaßt wird.

2. Grenzschichttheorie

2.1 Physikalische Voraussetzungen (Gültigkeitsbereich)

Alle Fluide mit geringer Zähigkeit η können in der freien Strömung, also "außerhalb" der Grenzschicht mit guter Näherung als reibungsfrei angesehen werden.

Für kleine Werte von η übt die Reibung über den Schubspannungsterm

$$\tau = \eta \frac{\partial u}{\partial y} \quad ; \quad \eta = \text{const} \quad (2.1)$$

nur dann einen merklichen Einfluß aus, wenn ein hinreichend großes Geschwindigkeitsgefälle vorhanden ist. In der freien Strömung ist dieser Term gegenüber dem Beitrag in unmittelbarer Wandnähe vernachlässigbar, da innerhalb der dünnen Grenzschicht ein starker Geschwindigkeitsanstieg von Null an der Wand (Haftbedingung) auf den Wert $U(x, \delta_g)$ der äußeren Strömung stattfindet.

Strömungsprobleme, die durch kleine Viskositäten des strömenden Fluids bzw. durch große Reynoldszahlen gekennzeichnet sind, erfordern damit nicht mehr die Lösung der allgemeinen Bewegungsgleichungen für das gesamte Strömungsfeld, sondern ermöglichen für jeden Bereich jeweils eine brauchbare Näherungslösung, die sich unter dieser Voraussetzung aus den Bewegungsgleichungen ableiten läßt. Die Gesamtlösung ergibt sich somit aus den Resultaten der reibungsfreien Außenströmung und der reibungsbehafteten Grenzschichtströmung, die in geeigneter Weise aneinander angepaßt werden, da der Übergang Grenzschicht - Außenströmung asymptotisch erfolgt.

Zur Definition der Grenzschichtdicke δ_g wird deshalb häufig derjenige Wert angenommen, für welchen die Geschwindigkeit $u(x, y)$ der Grenzschichtströmung sich nur noch um 1 % von der Geschwindigkeit der äußeren, reibungsfreien Strömung unterscheidet.

Diese (willkürliche) Festsetzung spielt für die spätere mathematische Formulierung nur noch eine untergeordnete Rolle, da die charakteristischen Eigenschaften der Grenzschichtströmung durch integrale Größen ersetzt werden.

Zur Erörterung der physikalischen Charakteristika der Grenzschichtgleichungen und insbesondere der damit verbundenen Gültigkeitsgrenzen hinsichtlich der Anwendbarkeit im Stabgitter soll zunächst die Lösung der Außenströmung als bekannt vorausgesetzt sein (vgl. Kap. 3).

Mit den Vereinbarungen :

- x - Koordinate entlang der Körperkontur
- y - Normale zu x senkrecht zur Wand
- u - wandparallele Geschwindigkeitskomponente
- v - Geschwindigkeitskomponente in y-Richtung
- l - charakteristische Bezugslänge
- U_{Bez} - Bezugsgeschwindigkeit
- p_{Bez} - Bezugsdruck
- Re - $\rho \frac{U_{\text{Bez}} l}{\eta} = \frac{U_{\text{Bez}} l}{\nu}$

sowie den dimensionslosen Größen :

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \frac{x}{l} & ; & & \tilde{y} &= \frac{y}{l} \sqrt{\text{Re}} \\ \tilde{u} &= \frac{u}{U_{\text{Bez}}} & ; & & \tilde{v} &= \frac{v}{U_{\text{Bez}}} \sqrt{\text{Re}} \\ \tilde{p} &= \frac{p - p_{\text{Bez}}}{\rho U_{\text{Bez}}^2} & ; & & \tilde{U} &= \frac{U}{U_{\text{Bez}}} \end{aligned}$$

erhält man durch Einsetzen in die Kontinuitäts- bzw. Navier-Stokes-Gleichung die folgenden dimensionslosen Ausdrücke /12 / :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad (2.2)$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \quad (2.3a)$$

$$\frac{1}{Re} \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} \right) = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \frac{1}{Re^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} \quad (2.3b)$$

Für die anfangs getroffene Beschränkung auf Fluide mit kleiner Zähigkeit η (Wasser, Luft, Na) bzw. großen Re-Zahlen wird offenbar der Impulsaustausch in Strömungsrichtung : $\partial^2 \tilde{u} / \partial \tilde{x}^2$ vernachlässigbar klein gegenüber dem äquivalenten Term in Querrichtung $\partial^2 \tilde{u} / \partial \tilde{y}^2$. In Gl. 2.3 b entfallen alle Glieder mit dem Faktor $1/Re$ bzw. $1/Re^2$ für $Re \rightarrow \infty$. Das bedeutet, daß aus der Bewegungsgleichung in y-Richtung nur noch die Aussage :

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad (2.4)$$

verbleibt und damit der Druck innerhalb der Grenzschicht unabhängig vom Wandabstand, d. h. quer zur Strömungsrichtung konstant ist. Der Druckverlauf $\tilde{p}(\tilde{x})$ wird also von der reibungslosen Außenströmung $U(x)$ der Grenzschicht aufgeprägt und kann über die BERNOULLI-Gleichung :

$$\rho/2 U^2(x) + p(x) = \text{const} \quad (2.5)$$

$$\text{bzw. } \frac{dp}{dx} = - \rho U(x) \frac{dU(x)}{dx} \quad (2.6)$$

in der Beziehung 2.3 a substituiert bzw. als bekannt vorausgesetzt werden. Die verbleibenden Gleichungen :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad (2.2)$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = \tilde{U} \frac{d\tilde{U}}{d\tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \quad (2.7)$$

liefern mit den Randbedingungen :

$$\tilde{y} = 0 : \quad \tilde{u}, \tilde{v} = 0 \quad (\text{Haftbedingung})$$

$$\tilde{y} \rightarrow \tilde{\delta}_g : \quad \tilde{u} = \tilde{U}(\tilde{x}) \quad (\text{Randbedingung})$$

$$\tilde{y} \rightarrow \tilde{\delta}_g : \quad \left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right|_{\tilde{y}=\tilde{\delta}_g} = 0 \quad (\text{Übergangsbedingung})$$

eine eindeutige Lösung für die beiden Unbekannten $\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y})$ und $\tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{y})$, sofern die Randbedingung $U(x)$, also die Außenströmung - die wiederum von der Geometrie bestimmt wird - bekannt ist. Die hier interessierende Schubspannung :

$$\tau(x) = \eta \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$$

ist damit für jede Stelle x der zu beschreibenden Kontur bestimmbar.

Über die durchgeführten Transformationen wird die dimensionslose Lösung unabhängig von der Re-Zahl, d.h., daß bei Änderung der Re-Zahl das dimensionsbehaftete Grenzschichtprofil lediglich eine affine Verzerrung erfährt, derart, daß die Querkordinate und die Geschwindigkeit in der Querrichtung mit $1/\sqrt{Re}$ multipliziert werden. Insbesondere folgt daraus, daß der Schubspannungsverlauf $\tilde{\tau}(\tilde{x})$ und die Lage der Ablösestelle :

$$\tau_w = \eta \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (2.8)$$

festliegt und unabhängig von der Re-Zahl wird.

Mit dem Ablösen der Grenzschicht ändern sich die Randbedingungen und die Strömungsform vollständig, d.h., daß spätestens bei der Ablösestelle die Gültigkeitsgrenze dieser Theorie erreicht ist. Gerade der mit den Ablöseerscheinungen verbundene Energieverlust, der sein Äquivalent in der Erzeugung von Wirbeln im Totwassergebiet des umströmten Körpers findet, bestimmt aber in dominanter Weise dessen Widerstandsverhalten.

Der genauen Kenntnis des Ablöseverhaltens ist insofern eine grundlegende Bedeutung zuzuordnen, da für den Druck nach dem Ablösen :

$$\tilde{p}(\tilde{x}) \approx \text{const} \approx \tilde{p}(\tilde{x}_a) \quad ; \quad (\tilde{x} \geq \tilde{x}_a)$$

gesetzt werden darf. Der (im zeitlichen Mittel) mit guter Näherung nahezu konstante Druck entlang der Kontur hinter der Ablösestelle ist typisch für alle Ablöseerscheinungen und ist sowohl beim Umströmen von Einzelkonturen als auch im Stabgitter verschiedenster Geometrien und Teilungsverhältnisse experimentell bestätigt. / 23/ Die Verwertung dieser Eigenschaft wird später bei der Bestimmung des Formwiderstandes ausgenutzt (vgl. Kap. 4).

Die Rücktransformation von Gl. 2.2 und 2.7 auf dimensionsbehaftete Größen liefert schließlich zwei partielle Differentialgleichungen (Grenzschichtgleichungen) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{Fortinuitätsgleichung}) \quad (2.9)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{Impulsbilanzierung in x-Richtung}) \quad (2.10)$$

die unter den getroffenen Voraussetzungen die wesentlichen Grenzschichteigenschaften beschreiben. Die numerische Integration dieser gekoppelten Gleichungen ist heute mit Hilfe von entsprechenden Rechenmaschinen mit ausreichender Genauigkeit möglich geworden.

2.2 Grenzschichtverhalten im Stabgitter

Die Problematik einer Analyse des Grenzschichtverhaltens im Stabgitter wird durch experimentelle Untersuchungen von ŽHUKAUSKAS und ULINSKAS / 29 / verdeutlicht, deren Ergebnisse in den Bildern 2.2 a - d zusammengefaßt sind. Danach erschwert sich die theoretische Beschreibung erheblich, da offensichtlich - nach einer von der Geometrie und der Re-Zahl abhängigen Lauflänge $\phi_{tr} (*)$ - die Grenzschicht selbst von der laminaren in die turbulente Strömungsform $\phi_{tu} (**)$ umschlägt. Da nun bei turbulenter Strömung die an der Körperwandung auftretenden Reibungswiderstände wesentlich größer sind als im laminaren Fall, kommt mit der Bestimmung des Umschlagpunktes (vgl. Kap. 2.3.4) eine weitere Verkomplizierung des Problems hinzu. Insbesondere treten zu den quasistationären Mittelwerten der Geschwindigkeiten noch zusätzliche Schwankungskomponenten, durch welche die turbulenten Schubspannungen ausgelöst werden, die nicht durch die Zähigkeit, sondern durch die entstehende Mischbewegung bedingt sind / 30 /. Mit der Turbulenz der Grenzschichtströmung ist aber auch ein Re-abhängiges "stromabwärtswandern" des Ablösepunktes verbunden, was durch die experimentellen Daten von HEINECKE / 18 / deutlich belegt wird. (Bild 2.1)

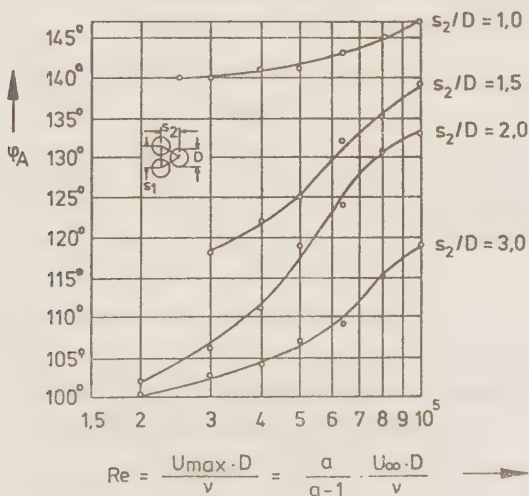


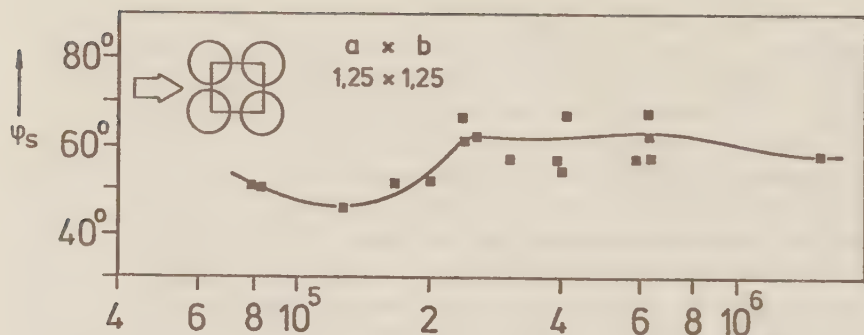
Bild 2.1

Ablöswinkel in Abhängigkeit von der Re-Zahl und dem Längsteilungsverhältnis $b = s_2/D$ im senkrecht angeströmten Stabgitter

(Querteilung $a = s_1/D = \text{const} = 1.86$)

Quelle : / 18 /

*) transient
**) turbulent



$$Re = \frac{w_{max} \cdot D}{\nu} \longrightarrow$$

$$\frac{w_{max}}{w_{\infty}} = \frac{a}{a-1}$$

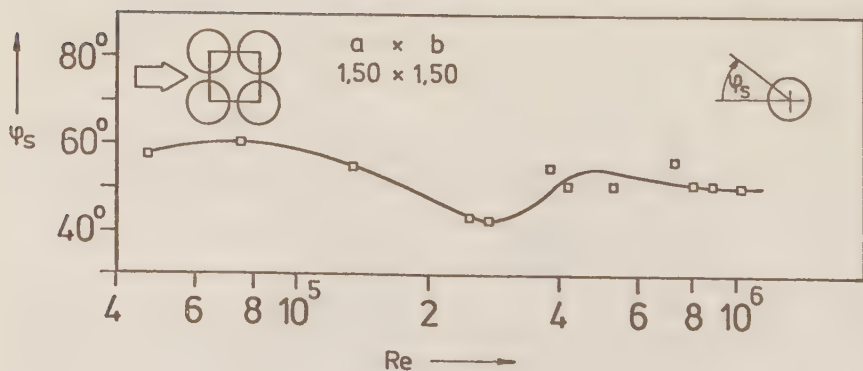


Bild 2.2 a) Lage des Staupunktes
im senkrecht angeströmten Stabbündel
(Quelle / 29 /)

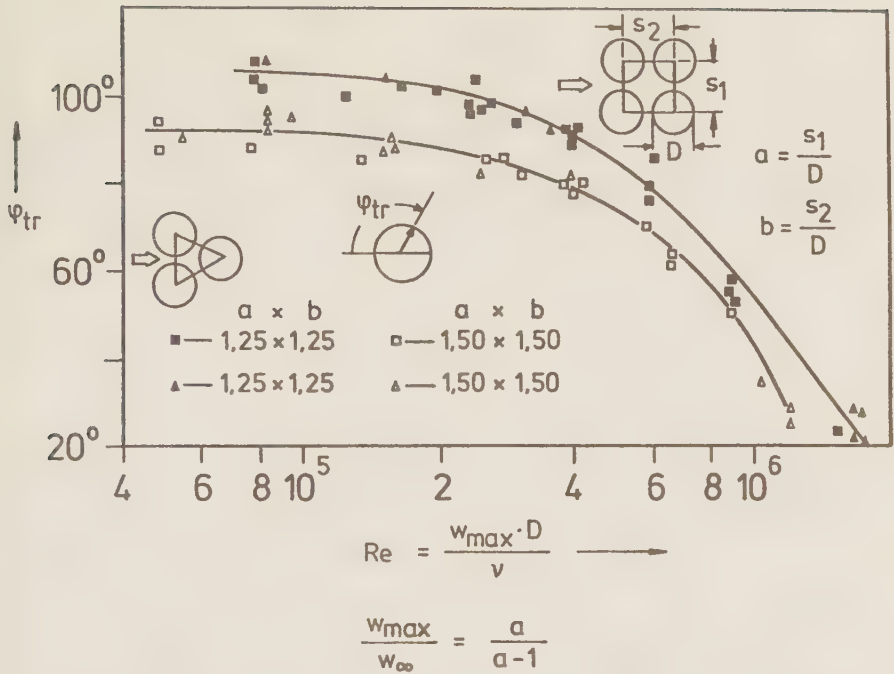


Bild 2.2 b) Grenzschichtumschlag laminar / turbulent
(Quelle / 29 /)

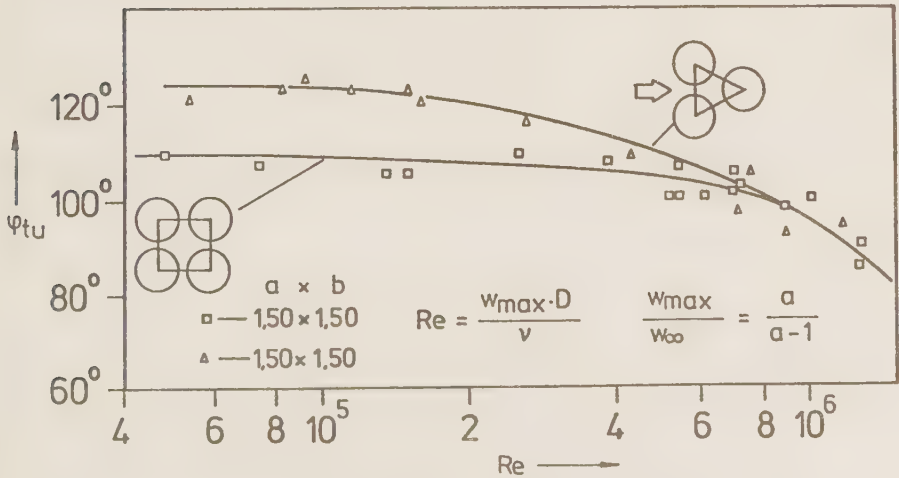


Bild 2.2 c) Beginn der vollturbulenten Grenzschicht
(Quelle / 29 /)

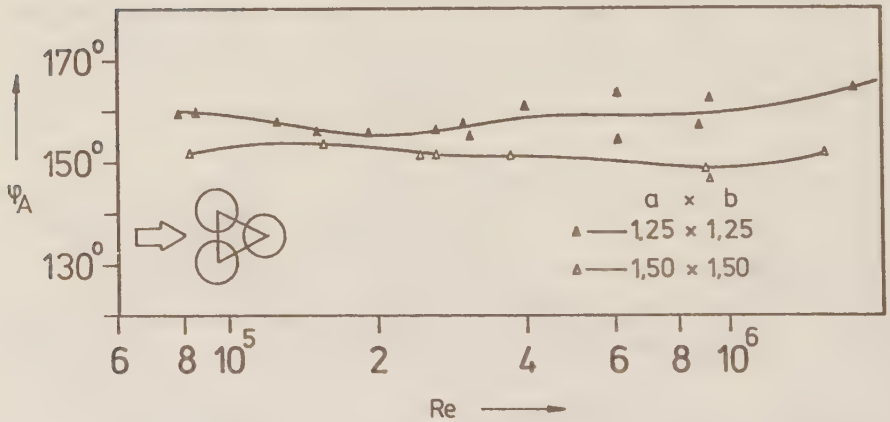
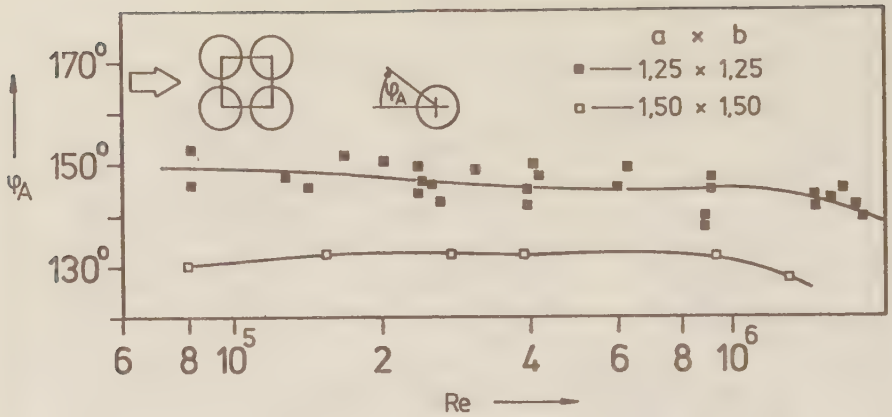


Bild 2.2 d) Ablösewinkel im senkrecht angeströmten Stabbündel
(Quelle / 29 /)

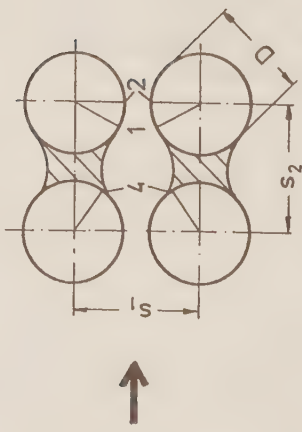
Die aufgezeigte Komplexität der Grenzschichtströmung im Stabgitter erfordert also eine theoretische Beschreibung, die die im Experiment beobachteten Erscheinungen möglichst gut approximiert. Demnach muß die theoretische Simulation nach einer gewissen laminaren Vorlaufstrecke die beginnende Instabilität (ϕ_{tr}), den Umschlag laminar/turbulent (ϕ_{tu}) und schließlich die turbulente Ablösung (ϕ_a) erkennen und reproduzieren, da diese Effekte letztlich für das gesamte Widerstandsverhalten verantwortlich sind.

Die experimentellen Auswertungen von / 29 / über die beobachtete geometrische Form des Ablösegebietes bestätigen diesen Sachverhalt. So zeigt die vollständig versetzte Dreiecks-Anordnung gegenüber dem quadratischen Gitteraufbau ein völlig unterschiedlich gestaltetes Ablösebild. Das deutlich kleiner ausgebildete Totwassergebiet wird durch den Einfluß der benachbarten Stäbe derart mitgestaltet, daß eine enger werdende Stabteilung auch eine Verringerung des Wirbelgebietes impliziert.

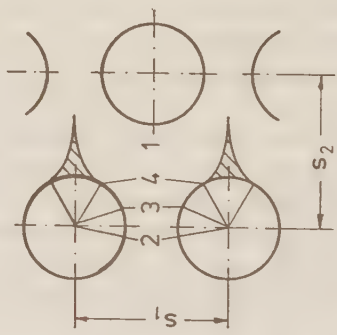
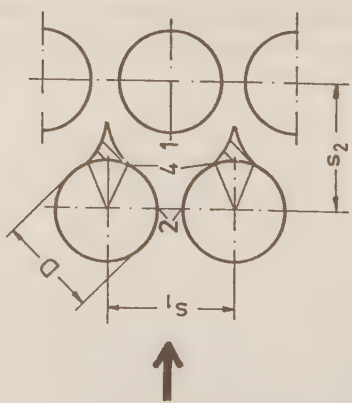
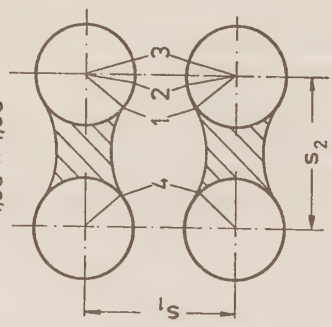
Zur Veranschaulichung dieses Sachverhaltes sind die Diagramme der Bilder 2.2 a - d für eine mittlere Re-Zahl von $4 \cdot 10^5$ graphisch ausgewertet und in Bild 2.3 übersichtlich zusammengefaßt. Dabei wurden die geometrischen Verhältnisse des Experiments maßstäblich eingehalten, um eine möglichst realistische Vorstellung der Größenordnungen zu verdeutlichen.

Der Einfluß der Längs- und Querteilung einer Stabanordnung kommt offensichtlich über die Randbedingung $U(x)$ bzw. $p(x)$ der Außenströmung zum Tragen, so daß die Geometrieabhängigkeit des zu analysierenden Problems an dieser Stelle schon eindeutig experimentell nachgewiesen ist.

1,25 x 1,25



1,50 x 1,50



Geometrie a x b	ϕ_s	ϕ_{tr}	ϕ_{tu}	ϕ_a
 1,25 x 1,25	62°	90°	—	145°
1,50 x 1,50	51°	80°	105°	132°
 1,25 x 1,25	0°	90°	—	158°
1,50 x 1,50	0°	112°	112°	150°

Bezeichnung:

$a = s_1/D$; $b = s_2/D$

ϕ_s : Staupunktlage

ϕ_{tr} : Umschlag laminar/turbulent

ϕ_{tu} : Beginn der vollturbulenten Grenzschicht

ϕ_a : Ablösepunkt

— (keine Messung)

Bild 2.3 Geometrie- und Re-abhängiges Grenzschichtverhalten

im senkrecht angeströmten Stabgitter

$$\text{(hier: } Re_{max} = \frac{w_{max} D}{\nu} = 4 \cdot 10^5 \text{ nach / 29 /)}$$

2.3 Integralverfahren

2.3.1 Charakteristische Grenzschriftgrößen (Definition)

Die exakte Berechnung der turbulenten Grenzschriftgleichungen erscheint solange unmöglich, wie die Reynold'schen Schubspannungen, eine Folge der turbulenten Austauschbewegung, nicht analytisch faßbar sind.

Mit der Mischungsweg-Hypothese oder anderen Turbulenzmodellen ist es teilweise gelungen, Zusammenhänge zwischen den zeitlichen Mittelwerten der Geschwindigkeit, den Schwankungsgeschwindigkeiten und der scheinbaren Schubspannung aufzustellen, die jedoch empirische Konstanten enthalten. Die Verwendung der somit halbempirischen Beziehungen ermöglichen also nur eine Näherungslösung. Unter diesen Umständen ist es ebenso vernünftig eine Lösung anzustreben, bei der die Profile der zeitlich gemittelten Geschwindigkeit in der turbulenten Grenzschrift aus Messungen als bekannt vorausgesetzt werden.

Interessanterweise lassen sich die turbulenten Geschwindigkeitsprofile in guter Näherung durch ein-parametrische dimensionslose (Geschwindigkeits)-Formparameter klassifizieren, mit denen auch die aufgezeigte affine Verzerrung von Laminar-Profilen beschrieben werden kann. Diese Formparameter sind durch die Quotienten folgender Integralausdrücke definiert :

$$H_{12} = \delta_1/\delta_2 \quad ; \quad \delta_1(x) = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy \quad \text{"Verdrängungsdicke"} \quad (2.11)$$

$$H_{23} = \delta_2/\delta_3 \quad ; \quad \delta_2(x) = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U} \right) \frac{u}{U} dy \quad \text{"Impulsverlustdicke"} \quad (2.12)$$

$$H_{32} = \delta_3/\delta_2 \quad ; \quad \delta_3(x) = \int_0^{\delta} \left(1 - \left\{ \frac{u}{U} \right\}^2 \right) \frac{u}{U} dy \quad \text{"Energieverlustdicke"} \quad (2.13)$$

wobei $u = u(x)$ wieder die (ortsabhängige) wandparallele Geschwindigkeitskomponente und $U(x)$ die Geschwindigkeitsverteilung der Außenströmung bezeichnen soll.

Der physikalische Hintergrund der vorweggenommenen Definitionen für $\delta_1 - \delta_3$ ist in der nachstehenden Skizze am Beispiel der Verdrängungsdicke δ_1 verdeutlicht.

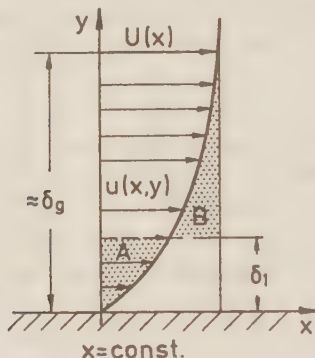


Bild 2.4 Definition der Verdrängungsdicke δ_1
(Fläche A = Fläche B)

$$\delta_1 = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

Infolge der Reibungswirkung in der Grenzschicht vermindert sich der durch den senkrechten Querschnitt bei $x = \text{const}$ tretende Massenstrom gegenüber dem reibungslosen Fall um den Wert :

$$\rho b \int_0^{\infty} \left(U(x) - u(x,y) \right) dy \approx \rho b \int_0^{\delta} \left(U(x) - u(x,y) \right) dy \stackrel{!}{=} U(x) \delta_1 \rho b$$

Damit kann δ_1 als diejenige Querkoordinate aufgefaßt werden, um welche die Außenströmung infolge der Grenzschichtwirkung von der Wand abgedrängt wird. Die Verdrängungsdicke δ_1 ist daher ein physikalisch sinnvolles Äquivalentmaß für die Grenzschichtdicke.

Analoge Bilanzierungen für den Impuls- bzw. Energiestrom liefern die Bestimmungsgleichungen für δ_2 und δ_3 .

Mit diesen Größen lassen sich nun entsprechende (ortsabhängige) Re-Zahlen bilden, die später in dimensionslosen Gleichungen verarbeitet werden :

$$\text{Re}_{\delta_1} = \frac{\delta_1(x) U(x)}{\nu} \equiv \text{Re}_1(x) \quad (2.14)$$

$$\text{Re}_{\delta_2} = \frac{\delta_2(x) U(x)}{\nu} \equiv \text{Re}_2(x) \quad (2.15)$$

$$\text{Re}_{\delta_3} = \frac{\delta_3(x) U(x)}{\nu} \equiv \text{Re}_3(x) \quad (2.16)$$

Auf der Basis der oben angegebenen Definition für $\delta_1 - \delta_3$ bzw. H_{12} und H_{32} hat FERNHOLZ / 36 / die Ergebnisse von verschiedenen Autoren zusammengestellt und durch eine empirische Funktion $H_{12} = H_{12} (H_{32})$ korreliert (vgl. Bild 2.5).

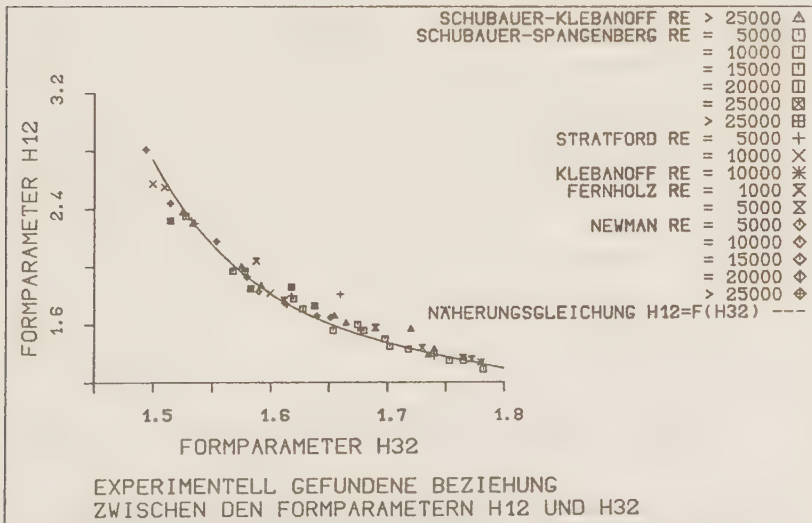


Bild 2.5 Klassifizierung von turbulenten Geschwindigkeitsprofilen in der Grenzschicht ($\text{Re} = \text{Re}_{\delta_2}$)

Da in den Formparametern letztlich die Geschwindigkeitsverteilung der turbulenten Grenzschicht entsprechend den Integralausdrücken für $\delta_1 - \delta_3$ enthalten ist und damit die Abhängigkeit von $\tilde{u}(x,y)$ vom Wandabstand y charakterisiert wird, genügt es, statt der partiellen DGL nur gewöhnliche DGL zu erfüllen. Man verzichtet also darauf, die Grenzschichtdifferentialgleichung für jedes Strömungsteilchen zu befriedigen, sondern erfüllt diese nur im integralen Mittel über die Grenzschicht.

2.3.2 Integrale Basisgleichungen (laminar/turbulent) - Lösungsweg

Die Ableitung von entsprechenden Integralsätzen gewinnt man durch Multiplikation der Grenzschichtgleichungen 2.9 und 2.10 mit bestimmten Funktionen der Geschwindigkeitsverteilung und anschließender Integration über die Grenzschichtdicke. (Die mathematische Durchführung dieses in der Literatur bekannten Verfahrens ist z. B. bei TRUCKENBRODT / 30 / sehr ausführlich beschrieben.)

Unter diesen Integralbedingungen zeichnen sich zwei Gleichungen, die Integralbedingungen für Impuls und Energie, durch ihre physikalische Anschaulichkeit besonders aus. In diesen beiden Gleichungen treten nun außer Integralausdrücken, gebildet mit den Geschwindigkeitsprofilen, die durch Formparameter H_{ij} ausgedrückt werden, noch zusätzliche Terme für die turbulente Wandschubspannung c_τ und für die turbulente Schubspannungsarbeit (für das Dissipationsintegral c_δ) auf :

$$\frac{d\delta_3}{dx} + 3 \frac{\delta_3}{U} \frac{dU}{dx} = 2 c_\delta \quad (2.17)$$

$$\delta_3 \frac{dH_{23}}{dx} + (H_{12} - 1) H_{23} \frac{\delta_3}{U} \frac{dU}{dx} = c_\tau - 2 H_{23} c_\delta \quad (2.18)$$

Abweichend von den in der Literatur überwiegend bevorzugten Impulsgleichungen wird hier das Energieverfahren favorisiert, weil sich die Basisgleichungen 2.17 und 2.18 für die spätere numerische Behandlung in eine übersichtliche Form transformieren lassen.

Die Ausdrücke c_τ und c_δ können durch die folgenden allgemeinen Abhängigkeiten beschrieben werden :

$$c_\tau = \frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{\alpha(H_{12})}{Re_2^a} \quad - \text{ turbulente Wandschubspannung} \quad (2.19)$$

$$c_\delta = - \int_0^\delta \frac{u}{U} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau}{\rho U^2} \right) dy = \frac{\beta(H_{32})}{Re_3^b} \quad - \text{ von den Schubspannungskräften in der Grenzschicht verrichtete Arbeit (Dissipationsintegral)} \quad (2.20)$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden die experimentell abgesicherten Ansätze für α und β erst in Kap. 2.3.3 zusammengestellt.

Das gekoppelte Gleichungssystem 2.17 und 2.18 läßt sich durch Einführung eines "modifizierten Formparameter" H vereinfachen. Anhand der von / 30 / vorgeschlagenen Definition :

$$\frac{dH_{23}}{(H_{12} - 1) H_{23}} = - \frac{dH}{H} \quad (2.21)$$

wählt man als Bezugszustand die Stelle $dU/dx = dp/dx = 0$ (Gleichdruck = Index $\infty \rightarrow H \stackrel{!}{=} 1$), so daß sich H durch Auswertung eines bestimmten Integrals ergibt. Unter Beachtung von:

$$H_{32} = 1/H_{23} \quad \text{bzw.} \quad \frac{dH_{32}}{H_{32}} = - \frac{dH_{23}}{H_{23}} \quad (2.22)$$

folgt :

$$H = \exp \int_{H_{32_\infty}}^{H_{32}} \frac{dH_{32}}{(H_{12} - 1) H_{32}} = - \exp \int_{H_{23_\infty}}^{H_{23}} \frac{dH_{23}}{(H_{12} - 1) H_{23}} \quad (2.23)$$

Die unteren Integrationsgrenzen entsprechen jetzt den Bezugswerten $H_{32_\infty} = 1/H_{23_\infty}$. Da der Zusammenhang $H_{12} = f(H_{32})$ bekannt ist (vgl. Bild 2.5), lassen sich die Integrationen numerisch durchführen.

Der gewonnene Vorteil wird offensichtlich, wenn man jetzt die Basisgleichungen 2.17 und 2.18 transformiert. Mit der Definitionsgleichung 2.16 für Re_3 findet man nach einigen Umformungen aus Gleichung 2.17 :

$$\frac{dRe_3}{dx} = U \cdot \phi - \frac{2Re_3}{U} \frac{dU}{dx} ; \quad (2.24)$$

$$\phi = \frac{2 \beta(H)}{v Re_3^b} \quad (2.25)$$

Unter Beachtung von :

$$Re_2 = H_{23} \cdot R_3$$

und der Definitionsgleichung 2.23 ergibt sich durch Einsetzen in (2.18) die Bestimmungsgleichung für die eingeführte Größe H:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{H}{U} \frac{dU}{dx} + \frac{\psi}{Re_3} \cdot U ; \quad (2.26)$$

$$\psi = \frac{H}{v} \frac{2 c_\delta - H_{32} c_\tau}{H_{12} - 1} \quad (2.27)$$

$$= \frac{H}{v} \frac{2\beta - \alpha H_{32}^{1+a} Re_3^{b-a}}{(H_{12} - 1) Re_3^b}$$

Die erhaltenen Gleichungen 2.24 und 2.26 bilden nun ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem vom Typ :

$$\frac{dy_1}{dx} = f(x, y_1, y_2)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f(x, y_1, y_2)$$

das mit Standardroutinen numerisch integriert werden kann.

Die Lösung hängt nur noch von der Randbedingung $U(x)$ und deren Ableitung dU/dx ab. Über den aus Messungen bekannten Zusammenhang :

$$H_{12} = f(H_{32})$$

und dem dadurch auswertbaren bestimmten Integralausdruck für H

$$H = \exp \int_{H_{32\infty}}^{H_{32}} \frac{dH_{32}}{(H_{12} - 1) H_{32}}$$

läßt sich für alle in den Schubspannungstermen ϕ und ψ vorkommenden Größen eine eindeutige Zuordnung als Funktion von H angeben.

Zweckmäßigerweise erstellt man sich ein für alle Mal für die laminare und turbulente Strömungsform je zwei "rechnerinterne" Tabellen, auf die während der Integration zurückgegriffen wird:

Beispiel für Zuordnungstabelle :

H_{23}	H_{32}	H_{12}	H	a	α	b	β	Ablösung ($\tau_w = 0$!)
$\sim$	$\sim$	$\sim$	H_A	$\sim$	0	$\sim$	$\sim$	$H < 1$
$\sim$	$\sim$	$\sim$	$H = 1$	$\sim$	$\sim$	$\sim$	$\sim$	Gleichdruck $H = 1$
$\sim$	$\sim$	$\sim$	H_O	$\sim$	$\sim$	$\sim$	$\sim$	$H > 1$
								Staupunktlösung

Die Lösung liefert dann an jeder Stelle des Integrationsweges ein Wertepaar für $H(x)$ und $Re_3(x)$. Über die Zuordnungstabelle findet man für jede Stelle x die aktuellen Größen $H_{32}(x)$, $H_{23}(x)$, $H_{12}(x)$, $\alpha(x)$...

Aus

$$\text{Re}_3(x) = \frac{U(x) \delta_3(x)}{\nu}$$

folgt sofort $\delta_3(x)$. Damit liegen alle hier interessierenden Größen der Grenzschicht fest :

$$\delta_1(x) = H_{12}(x) - H_{23}(x) - \delta_3(x)$$

$$\delta_2(x) = H_{23}(x) - \delta_3(x)$$

$$\text{Re}_2(x) = \frac{\delta_2(x) U(x)}{\nu}$$

$$\tau_w(x) = \frac{\alpha(x) \rho U^2(x)}{\text{Re}_2^a(x)}$$

Mit Erreichen der Ablösestelle ($x = x_a$), die durch $\alpha = 0$ bzw. $H(x_a) = H_A$ aufgrund der verschwindenden Schubspannung festgelegt ist, wird die Integration abgebrochen, da die bei der Ableitung der Gleichungen getroffene Voraussetzung einer dünnen Grenzschicht (und damit $dp/dy = 0$) nicht mehr erfüllt ist.

2.3.3 Ansätze für Geschwindigkeitsformparameter, Schubspannung und Dissipationsintegral

Die Güte der erzielten Lösung hängt also von der Zuverlässigkeit der semi-empirischen Gesetze $H_{12} = f(H_{32})$, den Ansätzen für die Schubspannungsgrößen c_T und c_δ sowie von der Randbedingung $U(x)$ ab.

Der Schwerpunkt der Untersuchungen liegt wegen des wichtigen strömungstechnischen Problems der Ablösung auf turbulenten Grenzschichten mit Druckanstieg. Die asymptotischen Grenzfälle - die für die praktische Rechnung allerdings kaum eine Rolle spielen - sind aus theoretischen Überlegungen bekannt und werden von den nachstehend angegebenen Funktionen exakt erfüllt. Die Zwischenwerte sind durch Messungen inzwischen so zuverlässig abgesichert, so daß sich bei den neueren Literaturangaben im Ergebnis kaum noch relevante quantitative Unterschiede feststellen lassen.

In dieser Arbeit werden die im folgenden aufgeführten Korrelationen eingesetzt :

1. Formparameter $H_{12} = f(H_{32})$

a) laminare Strömungsform in der Grenzschicht :

Quelle : EPPLER / 34 /

asymptotischer Grenzfall : $H_{32} = 1.66666 = 5/3$

Staupunkt : $H_{32} S = 1.62575$

Gleichdruck $\left(\frac{dU}{dx} = 0 \right)$: $H_{32 \infty} = 1.57258$

laminare Ablösung ($x=x_A$) : $H_{32 A} = 1.51509$

$H_{32} > H_{32 \infty}$:

$H_{12} = 79.870845 - 89.582142 H_{32} + 25.715786 H_{32}^2$

$H_{32 A} \leq H_{32} \leq H_{32 \infty}$:

$H_{12} = 4.02922 - (583.60182 - 724.55916 H_{32} + 227.18220 H_{32}^2) \sqrt{H_{32} - 1.51509}$

b) turbulente Strömung

Quelle : FERNHOLZ / 36 /

asymptotischer Grenzfall : $H_{32} = 2 \quad H_{12} \rightarrow 1$ (Rechteckprofil)

durch Messungen abgesichert : $1.30 \leq H_{12} \leq 2.85$ (vgl. Bild 2.5)

Gültigkeitsbereich : $2 \cdot 10^3 \leq Re_2 \leq 7.6 \cdot 10^4$

$$H_{12} = 1 + 1.48 (2 - H_{32}) + 104 (2 - H_{32})^{6.7}$$

2. Ansätze für die Energiedissipation $c_\delta = \beta (H_{32}) Re_3^{-b}$ (Gl. 2.20)

a) laminare Strömungsform in der Grenzschicht :

Quelle : EPPLER / 34 /

$$b = 1.0$$

$$\beta = 7.853976 H_{32} - 10.260551 H_{32}^2 + 3.418898 H_{32}^3$$

b) turbulente Strömung

Quelle : SCHLICHTING / 37 /

$$b = 0.2317 H_{32} - 0.2644 - 0.87 \cdot 10^5 (2 - H_{32})^{20}$$

$$\beta = \{0.00481 + 0.0822 (H_{32} - 1.5)^{4.81}\} H_{32}^b$$

3. Ansätze für die Wandschubspannung $c_\tau = \alpha (H_{1j}) Re_2^{-a}$ (Gl. 2.19)

a) laminare Strömungsform in der Grenzschicht :

Quelle : EPPLER / 34 /

$$a = 1.0$$

$$H_{32} > H_{32\infty}$$

$$\alpha = 1.372391 - 4.226253 H_{32} + 2.221687 H_{32}^2$$

$$H_{32A} \leq H_{32} \leq H_{32\infty}$$

$$\alpha = 2.512589 - 1.686095 H_{12} + 0.391541 H_{12}^2 - 0.031729 H_{12}^3$$

b) turbulente Strömung :

Quelle : SCHLICHTING / 37 /

$$a = 0.268$$

$$\alpha = 0.0245 (1 - 2.007 \log H_{12})^{1.705}$$

Die Formparameter H_{ij} , sowie alle in den Schubspannungstermen ϕ und ψ vorkommenden Größen werden auf die im vorigen Abschnitt definierte Variable H transformiert. Die sich daraus ergebende funktionale Abhängigkeit $y_i = f(H)$ ist in Bild 2.6 zusammengefaßt und in Tab. 2.1 für die wichtigsten Punkte ausgewertet.

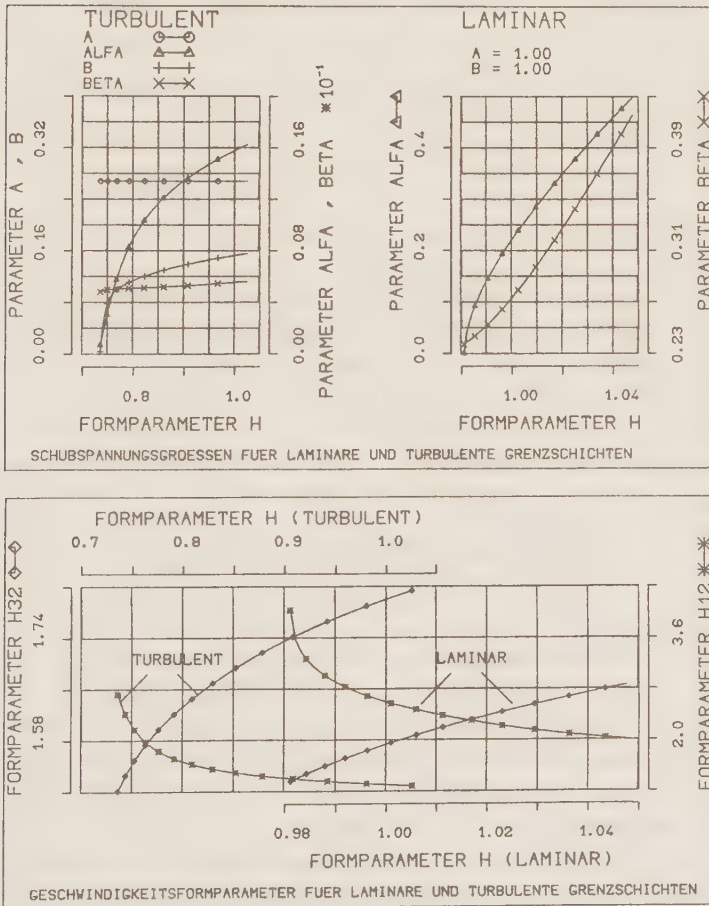


Bild 2.6 Funktionale Abhängigkeit der transformierten Größen a , b , α , β , sowie der Funktion H_{12} und H_{32} vom modifizierten Geschwindigkeitsformparameter H für laminare und turbulente Grenzschichten $y_i = f(H)$

Tab. 2.1 Werte der laminar/turbulenten Grenzschichtfunktionen

Funktion	Staupunkt ($x=x_s$) laminar	Gleichdruck ($\frac{du}{dx} = 0$)		Ablösung ($x=x_a$)	
		laminar	turbulent	laminar	turbulent
H_{23}	0.61510	0.63590	0.55556	0.66002	0.66622
H_{32}	1.62575	1.57258	1.80000	1.51509	1.50100
H_{12}	2.20112	2.59110	1.29816	4.02922	2.72550
H	1.02485	1.0	1.0	0.98120	0.73606 *)
a	1.0	1.0	0.268	1.0	0.268
α	0.37362	0.22052	0.01578	0.0	0.0
b	1.0	1.0	0.15266	1.0	0.0
β	0.34019	0.27268	0.00554	0.23695	0.00482

*) Vergleichende Literaturangaben für turbulente Ablösung :

Autor	Quelle	H_{32A}	H_A
Rotta	/ 31 /	$1.437 < H_{32} < 1.439$	0.723
Walz	/ 32 /	$1.50 < H_{32} < 1.57$	$0.736 < H < 0.762$
Townsend	/ 33 /	1.538	0.748
Eppler	/ 34 /	$1.46 < H_{32} < 1.58$	$0.727 < H < 0.767$
Truckenbrodt	/ 35 /	1.438	0.723
Fernholz	/ 36 /	1.501	0.736

Die in der Literatur leicht differierenden Angaben für die Verhältnisse an der Ablösestelle haben keine Bedeutung für die rechnerische Ermittlung der Ablösestelle, weil sich der Einfluß des Druckgradienten auf den Formparameter kurz vor Erreichen der turbulenten Ablösung sehr empfindlich auswirkt. Dieses Verhalten äußert sich durch relativ große Änderungen von H, so daß die Ablösestelle selbst also kaum vom gewählten Wert des Ablösungsparameters beeinflusst wird. Zur Orientierung gibt EPPLER / 34 / an, daß bei $H_{32} = 1.58$ schon Ablösung eintreten kann und, daß sie bei $H_{32} = 1.46$ bereits sicher eingetreten ist. Der hier gewählte Mittelwert $H_{32} = 1.501$ bzw. $H_A = 0.73606$ deckt sich damit in guter Übereinstimmung mit den zitierten Autoren.

2.3.4 Stabilitätskriterium für Grenzschichtumschlag (laminar/turbulent)

Der Grenzschichtumschlag von der laminaren in die vollturbulente Strömungsform wird im vorliegenden Verfahren einfach dadurch berücksichtigt, daß ab der Umschlagstelle mit den angegebenen turbulenten Beziehungen weiter gerechnet wird.

Die eigentliche Problematik liegt aber in der Vorhersage dieses komplexen Phänomens, das von vielen Parametern wie der Re-Zahl, dem Druckverlauf, der Außenströmung, der Wandbeschaffenheit (Rauhigkeit) sowie dem Turbulenzgrad der Außenströmung beeinflusst wird.

Theoretische Stabilitätsuntersuchungen führen zu sogenannten Indifferenzkurven, die die beginnende Instabilität der laminaren Grenzschicht charakterisieren (ϕ_{tr} in Bild 2.2 b). Die Stabilitätsgrenze alleine reicht allerdings für die Fixierung des Umschlagpunktes (ϕ_{tu}) nicht aus, da zwischen der beginnenden Instabilität und dem Umschlag immer eine gewisse Laufstrecke erforderlich ist. Physikalisch bedeutet dies, daß die von der Außenströmung in die Grenzschicht hereingetragenen Störungen in Form einer instabilen Wellenfront sich entgegen der dämpfenden Wirkung der Viskosität zunehmend in ihrer Amplitude aufschaukelt, um schließlich in die völlig unregelmäßige vollturbulente Bewegung umzuschlagen.

Als dimensionsloses Maß für die instabile Lauflänge, also der Abstand zwischen Indifferenz- und Umschlagpunkt kann nach Angaben von GRANVILLE / 39 / und SCHLICHTING / 38 / die Differenz der mit der Impulsverlustdicke δ_2 gebildeten Reynoldszahlen angesetzt werden :

$$\tilde{l} \sim Re_{\delta_2/\text{Umschlag}} - Re_{\delta_2/\text{krit}} \quad (2.28)$$

WIEGHARDT / 40 / präzisiert die kritische Re-Zahl in Anlehnung an Stabilitätsrechnungen mit einem Exponentialansatz der in dieser Arbeit als Rechenvorschrift zur Bestimmung des Indifferenzpunktes übernommen wurde.

Mit

$$\text{Re}_{\delta_2 \text{krit}} = e^{(a-b) H_{12}} \quad ; \quad a = 26.3 \quad (2.29) \\ b = 8$$

ist eine Formulierung angegeben, die über H_{12} vom turbulenten Geschwindigkeitsprofil abhängt.

Für den Umschlagpunkt selbst gibt es aufgrund der oben angeführten Komplexität des Problems unterschiedliche Empfehlungen in der Literatur. So schlagen TRUCKENBRODT / 35 / und SCHLICHTING / 37 / vor, das Druckminimum $du/dx = 0$ der Außenströmung bzw. spätestens die laminare Ablösestelle als Umschlagkriterium zu wählen, während EPPLER / 34 / die Bedingung :

$$\ln \text{Re}_{\delta_2} > 34.2 H_{32} - 46.78 \quad (2.30)$$

empfiehlt. Hier wurde die Eppler'sche Formulierung (Gl. 2.30) bevorzugt, weil diese Umschlagbedingung sowohl von der jeweils gerechneten Grenzschichtsituation selbst abhängt, als auch in Verbindung mit dem Wieghardt'schen Ansatz (Gl. 2.29) zu der theoretischen Stabilitätsanalyse (Gl. 2.28) konsistent ist. Darüberhinaus zeigen die gerechneten Ergebnisse eine gute Übereinstimmung mit den Meßergebnissen von ZHUKAUSKAS. (Kap. 2.2, Bilder 2.2 a - d).

Für den Umschlagpunkt selbst ist im Programm die physikalische Bedingung :

$$\begin{aligned} \delta_{2l}(x_u) &= \delta_{2t}(x_u) \quad ; \quad \text{Index l : laminar} \\ &\quad \text{Index t : turbulent} \\ \text{bzw. } \delta_{3l}(x_u) &= \delta_{3t}(x_u) \end{aligned} \quad (2.31)$$

einzuhalten, d. h., daß die Parameter $H_{32} = H_{23}^{-1}$ der laminaren und turbulenten Grenzschicht (im Umschlagpunkt) gleich sind.

Man wird später an den gerechneten Beispielen erkennen, daß nach dem Umschlag eine starke Zunahme von H_{32} auftritt, während der Parameter H_{12} im transienten Umschlagbereich von $H_{12} \approx 2.6$ auf den Wert $H_{12} \approx 1.4$ abfällt. Es erscheint bemerkenswert, daß die Numerik diese Effekte, die quantitativ durch Messungen von SCHUBAUER und KLEBANOFF / 50 / *) bestätigt sind, alleine aus den angegebenen Beziehungen verifiziert.

*) entnommen aus SCHLICHTING / 38 /

2.3.5 Staupunktbedingungen

Für die durchzuführende Integration müssen noch Anfangswerte quantifiziert werden, die man durch Linearisieren der Potentiallösung in unmittelbarer Umgebung des Staupunktes erhält. Die "ebene Staupunktströmung" - eine der wenigen exakten Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen - wird durch eine nicht-lineare DGL 3. Ordnung beschrieben, deren numerische Lösung die dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung u/U für die zähe Strömung in der Grenzschicht liefert. Die hier interessierenden Daten gelten für alle stumpfen Körper in Staupunktnähe und sind in nachstehender Tabelle 2.2 zusammengefaßt. / 37 /

$$\eta = \sqrt{\frac{a}{\nu}} \cdot y ; \quad \text{dimensionsloser Wandabstand} \quad (-) \quad (2.32)$$

$$\phi' = \frac{u(x)}{U(x)} ; \quad \text{bezogene Geschwindigkeitsverteilung} \quad (-) \quad (2.33)$$

$$a ; \quad \text{(linearisierte) Steigung der Außenströmung in unmittelbarer Staupunktnähe} \quad (U(x) = a x) \quad (1/s)$$

$$U(x) ; \quad \text{Geschwindigkeitsverteilung der Außenströmung} \quad (m/s)$$

Tab. 2.2 Geschwindigkeitsverteilung der ebenen Staupunktlösung

	η	ϕ'	η	ϕ'
(Haftbedingung)	0.0	0.0000	2.6	0.9946
	0.2	0.2266	2.8	0.9970
	0.4	0.4145	3.0	0.9984
	0.6	0.5663	3.2	0.9992
	0.8	0.6859	3.4	0.9996
	1.0	0.7779	3.6	0.9998
	1.2	0.8467	3.8	0.9999
	1.4	0.8968	4.0	1.0000
	1.6	0.9323	4.2	1.0000
	1.8	0.9568	4.4	1.0000
	2.0	0.9732	4.6	1.0000
	2.2	0.9839	4.8	1.0000
($\approx$ Grenzschichtdicke)	2.4	0.9905	5.0	1.0000

Die Lösung veranschaulicht den asymptotischen Charakter der Grenzschicht und verdeutlicht gleichzeitig die willkürliche Festlegung der Grenzschichtdicke $\delta_g \approx 0.99 \phi'$.

$$\delta_g \approx 2.4 \sqrt{\left(\frac{v}{a}\right)} \quad (2.34)$$

Die mit Gl. 2.11 - 2.13 definierten Integralausdrücke für $\delta_1 - \delta_3$ sind jedoch eindeutig auswertbar. Eine numerische Integration ergibt die folgenden Staupunktdaten :

$$\delta_1 = 0.6479 \sqrt{\left(\frac{v}{a}\right)} \quad ; \quad H_{12} = \delta_1 / \delta_2 = 2.2167$$

$$\delta_2 = 0.2923 \sqrt{\left(\frac{v}{a}\right)} \quad ; \quad H_{23} = \delta_2 / \delta_3 = 0.6148$$

$$\delta_3 = 0.4754 \sqrt{\left(\frac{v}{a}\right)} \quad ; \quad H_{32} = \delta_3 / \delta_2 = 1.6265$$

Der damit korrespondierende, modifizierte Formparameter $H_s = H_o$ im Staupunkt liegt dann mit

$$H_o = 1.024855$$

fest. Die dimensionsbehafteten Grenzschichtgrößen $\delta_1 - \delta_3$ hängen nur noch von der Viskosität v und der Steigung a der Außenströmung in unmittelbarer Staupunktnähe ab, d.h., daß damit bei bekannter Außenströmung alle interessierenden Größen festliegen und quantifizierbar sind.

2.4 Hinweise zur stabilen numerischen Integration

Die gekoppelten Differentialgleichungen 2.24 und 2.26 sind in Verbindung mit den Schubspannungsgrößen ϕ und ψ sowohl für den laminaren als auch für den turbulenten Fall über die angegebenen Umschlagskriterien mathematisch eindeutig definiert.

Dennoch empfiehlt es sich, die Gleichungen für eine numerische Behandlung aufzuarbeiten, da sonst beim Integrationsprozess sich aufschaukelnde Instabilitäten entstehen können. Die Ursachen dafür sind i.a. nicht in dem eingeschlagenen Lösungsweg zu suchen, sondern sind kennzeichnend für die Eigenschaften der Differentialgleichungen selbst.

So ändert sich z. B. im turbulenten Fall die Größe H nur innerhalb des Intervalls

$$H_S \geq H \geq H_A$$

$$1.024 \geq H \geq 0.736$$

während die gekoppelte Größe Re_δ unter Umständen mehrere Größenordnungen durchläuft. Auf beiden Seiten der Gleichungen treten nun in den dimensionsbehafteten Schubspannungsgrößen ϕ und ψ noch Quotienten der Größenordnung $1/\nu \sim 10^6$ auf und darüberhinaus Ableitungen dU/dx der Außenströmung, die in den meisten Fällen nicht analytisch vorliegen. Das bedeutet, daß selbst eine sehr exakte numerische Lösung für die Konturgeschwindigkeit $U(x)$ - mit einer Abweichung $\ll 1\%$ von der analytischen Lösung - durch das Ersetzen der Differentialquotienten mittels finiter Differenzenformeln immer einen Restfehler aufweisen wird.

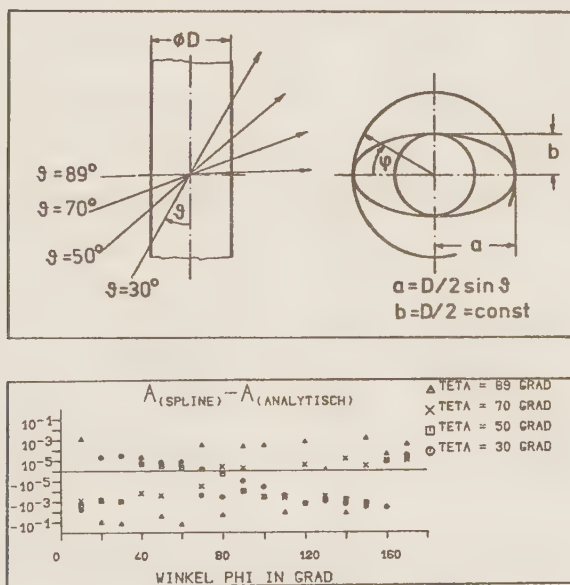
Dieses Verhalten ist in Bild 2.7 verdeutlicht. Hier wurden die durch den Winkel θ definierten elliptischen Schnittprofile eines Zylinders als Demonstrationsbeispiel gewählt. Für jedes Profil ist die errechnete absolute Differenz in den Ableitungen :

$$\Delta = \left. \frac{dU}{dx} \right|_{\text{Numerik}} - \left. \frac{dU}{dx} \right|_{\text{analytisch}} = \Delta_{\text{Spline}} - \Delta_{\text{analytisch}}$$

über dem Azimutwinkel ϕ aufgetragen, wobei die "numerischen" Daten mit der in Kap. 3 erläuterten Theorie erzeugt worden sind und die durchgezogene Basislinie immer dem analytischen Wert entspricht.

Bild 2.7 Absolute Differenz Δ der Gradienten für die Konturgeschwindigkeit

$$\Delta = \left. \frac{dU}{dx} \right|_{\text{Numerik}} - \left. \frac{dU}{dx} \right|_{\text{analyt. Lösung}} = A_{\text{Spline}} - A_{\text{analytisch}}$$



Man erkennt, daß die absolute Abweichung tolerierbar ist, wenn die numerischen Stützwerte der Ableitung z. B. durch Spline - Funktionen geglättet werden. Dennoch würden diese kleinen Schwankungen in U bzw. dU/dx aufgrund der Größenordnung von 10^6 für ϕ und ψ multiplikativ verstärkt, so daß selbst kleine Fehler beim Berechnen der Größe dRe_3/dx entsprechende Schwankungen in der gekoppelten Größe dH/dx auslösen.

Im darauffolgenden Integrationsschritt wird diese Anregung von H wieder in die andere Gleichung getragen, dort wieder verstärkt, usw. Letztlich schaukelt sich das gesamte System soweit auf, bis die Amplitude, d.h. bis die Größe H außerhalb des Definitionsintervalls $H_A \leq H \leq H_S$ gerät und damit die Lösung völlig unbrauchbar wird.

Die angedeuteten Probleme der numerischen Instabilität lassen sich durch eine Transformation beseitigen. Durch Einführen von geeigneten Bezugsgrößen (Index_∞) :

$$U_{\infty}, L, \nu \quad \text{bzw.} \quad Re_{\infty} = \frac{U_{\infty} L}{\nu}$$

$$\text{mit} \quad L = a(\theta) = \frac{D}{2 \sin \theta} \quad (\text{große Halbachse der Ellipse})$$

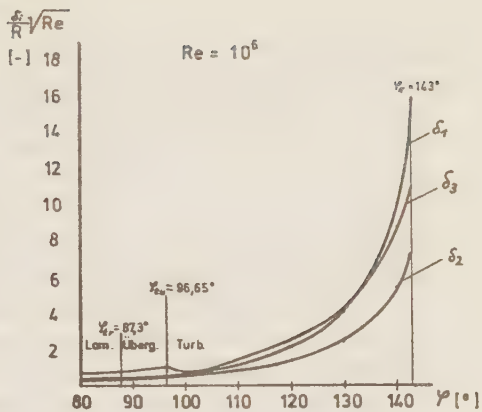
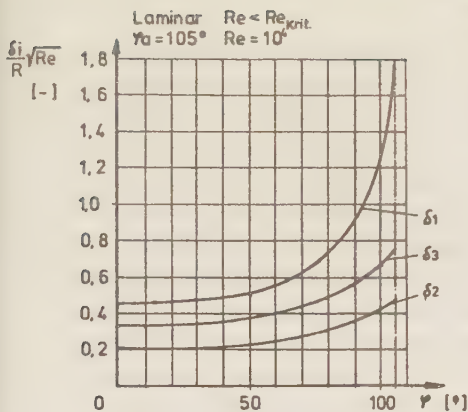
lassen sich die zu lösenden Differentialgleichungen wie folgt umformen :

$$\frac{d\tilde{R}_3}{d\tilde{s}} = \tilde{U} \tilde{\phi} - \frac{2\tilde{R}}{\tilde{U}} \frac{d\tilde{U}}{d\tilde{s}} \quad ; \quad \tilde{\phi} = \frac{2 \beta}{(\tilde{R}_3 Re_{\infty})^b} \quad (2.35)$$

$$\frac{d\tilde{H}}{d\tilde{s}} = \frac{\tilde{H}}{\tilde{U}} \frac{d\tilde{U}}{d\tilde{s}} + \frac{\tilde{\psi}}{\tilde{R}_3} \quad ; \quad \tilde{\psi} = \frac{2 \beta - \alpha H_{32}^{1+a} (\tilde{R}_3 Re_{\infty})^{b-a}}{(H_{12} - 1) (\tilde{R}_3 Re_{\infty})^b} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_3 &= \delta_3 / L & ; & \quad \tilde{R}_3 = \tilde{\delta}_3 \quad \tilde{U} = Re_3 / Re_{\infty} \\ \tilde{s} &= x / L & ; & \quad \tilde{\phi} = \phi \, \nu \\ \tilde{U} &= U / U_{\infty} & ; & \quad \tilde{\psi} = \psi \, \nu \end{aligned}$$

Nach der Integration erfolgt jetzt zusätzlich eine Rücktransformation über die oben angegebenen Beziehungen. Die Ergebnisse von Testrechnungen am Einzelzylinder, die mit dem erläuterten Integralverfahren durchgeführt wurden, sind in Bild 2.8 zusammengefaßt.



$$Re = \frac{u_\infty R}{\nu}$$

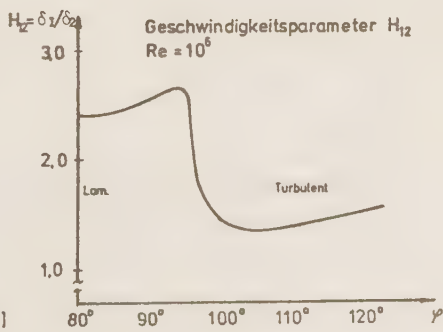
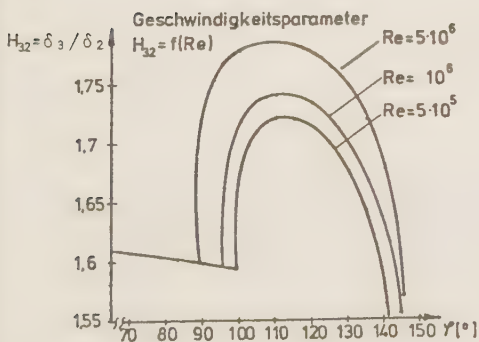
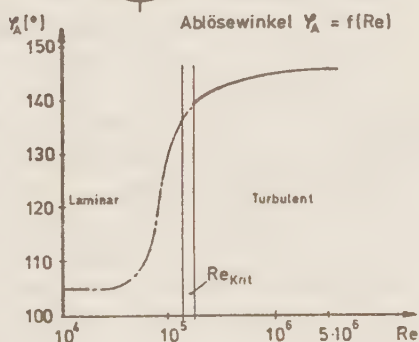
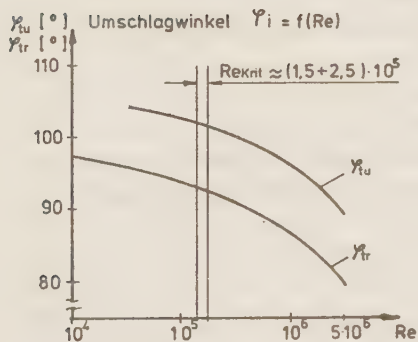


Bild 2.8

Testrechnungen am Einzelzylinder
 Zusammenfassende Ergebnisse der laminar/turbulenten
 Grenzschichtrechnung nach dem Energieverfahren
 (Integralmethode)

Zu Vergleichszwecken wurden für die laminare Grenzschichtströmung noch zusätzlich die partiellen Differentialgleichungen 2.9 und 2.10 integriert. Beide Lösungsvarianten bringen identische Ergebnisse für die interessierenden Größen $\delta_1 - \delta_3$, den Schubspannungsverlauf τ_w sowie für den Ablöswinkel ϕ_A .

Vergrößert man die Re-Zahl, so wird die beginnende Instabilität (ϕ_{tr}) der Grenzschicht während der Integration erkannt und festgehalten. Nach erfolgtem Umschlag (ϕ_{tu}) rechnet das Programm in der erläuterten Weise bis zur turbulenten Ablösung weiter. Die mit zunehmender Re-Zahl früher einsetzende Instabilität (ϕ_{tr}) bzw. Umschlagstelle (ϕ_{tu}) ist in der mittleren Abbildung erkennbar.

Für $Re > Re_{krit}$ verschiebt sich die Lage der Ablösestelle deutlich "stromabwärts", d.h., daß mit dem typischen fast sprunghaften Verändern von $\phi_A \approx 105^\circ$ (laminar) jetzt Werte von $\phi_A \approx 140^\circ - 150^\circ$ im turbulenten Bereich erreicht werden.

Damit ist nachgewiesen, daß der programmierte Formalismus die im Experiment beobachteten Phänomene im wesentlichen richtig wiedergibt. Damit hängt die Güte der Lösung "nur" noch von der richtigen Randbedingung, d.h. der richtigen Beschreibung der Konturgeschwindigkeit $U(x)$ ab.

3. Potentialtheorie

3.1 Mathematisch-physikalische Eigenschaften der Potentialströmung

Die bisher erörterten experimentellen Ergebnisse zeigen, daß das Strömungsbild und das damit korrespondierende Widerstandsverhalten im Stabgitter letztlich auf die in der Grenzschicht sich abspielenden Vorgänge zurückzuführen ist. Insbesondere sind die Zähigkeitseinflüsse in der Außenströmung - gegenüber den auftretenden Reibungs- und Ablöseerscheinungen an der Kontur selbst - vernachlässigbar. Für eine theoretische Beschreibung der Außenströmung ist es deshalb sinnvoll und physikalisch erlaubt, aus den Bewegungsgleichungen alle Terme zu streichen, die einen untergeordneten Beitrag leisten. Zudem wird dadurch - vor allem bei komplizierten Geometrien - überhaupt erst eine brauchbare Näherungslösung möglich, die - in Ergänzung mit den Grenzschichtgleichungen - das experimentelle Ergebnis in zufriedenstellender Weise bestätigt oder gar ersetzt.

Die Güte der Grenzschichtlösung hängt aber entscheidend von der richtigen (Druck)-Randbedingung ab, d. h. für die anzustrebende theoretische Simulation, daß die (ideale) Ablösestromlinie an derselben Stelle die Kontur verläßt, die mit dem errechneten Ablösepunkt übereinstimmt. In diesem Fall genügt die Lösung sowohl den physikalischen Forderungen der Grenzschichtrechnung als auch in guter Näherung dem realen Strömungsbild.

Eine wesentliche Vereinfachung der Bewegungsgleichungen erhält man, wenn für das Strömungsfeld im betrachteten Gebiet G die Bedingung :

$$\operatorname{rot} \vec{w} = 0 \quad (3.1)$$

gesetzt wird. Diese Forderung wird von selbst erfüllt, wenn man das Geschwindigkeitsfeld $\vec{w}(\xi, \eta)$ in der Anströmebene durch ein skalares Geschwindigkeitspotential der Form :

$$\vec{w} = \operatorname{grad} \phi(\xi, \eta) \quad ; \quad \vec{w} = u \vec{e}_\xi + v \vec{e}_\eta \quad (3.2)$$

darstellt.

Für jedes skalare Feld gilt formal nach den Regeln der Vektoranalysis : (BRONSTEIN / 11 /)

$$\text{rot grad } \Phi = 0 \quad (3.3)$$

$$\text{div grad } \Phi = \Delta \Phi \quad (3.4)$$

sowie die Identitätsbeziehung :

$$\text{rot (rot } \vec{w}) = \text{grad (div } \vec{w}) - \Delta \vec{w} \quad (3.5)$$

Daraus lassen sich die folgenden Eigenschaften für Potentialströmungen zusammenfassen :

Für ein inkompressibles Fluid ($\rho = \text{const}$) genügt die Laplace-Gleichung :

$$\Delta \Phi = 0 \quad (3.6)$$

einerseits der Kontinuitätsbedingung :

$$\text{div } \vec{w} = 0 \quad (3.7)$$

und erfaßt andererseits die gegenseitige Beeinflussung der umströmten Konturen, d.h. die charakteristische, elliptische Eigenschaft der Strömung bleibt voll erhalten. Weiterhin folgt aus der Vektorgleichung 3.5 für alle Potentialströmungen wegen $\text{rot } \vec{w} = 0$ (Gl. 3.1) und $\text{div } \vec{w} = 0$ (Gl. 3.7) unmittelbar die Bedingung :

$$\Delta \vec{w} = 0 \quad (3.8)$$

Damit schließt die in Gl. 3.1 geforderte Drehungsfreiheit auch eine Reibungsfreiheit ($\eta \Delta \vec{w} = 0$) der Strömung von selbst mit ein.

Diese physikalisch wichtige Eigenschaft ergibt endliche Geschwindigkeiten $U(x)$ an umströmten Wänden (slip-condition) und führt aufgrund der gezeigten Reibungsfreiheit zum d'Alembert'schen Paradoxon.

Beschränkt man sich auf ebene Strömungen, so folgt aus der Kontinuitätsgleichung 3.7 in kartesischen ξ, η - Koordinaten :

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad (3.9)$$

sowie die Bedingung für die Drehungsfreiheit ($\text{rot } \vec{w} = 0$) :

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad (3.10)$$

Die Kontinuitätsgleichung 3.9 wird auch durch Einführen der sog. Stromfunktion $\Psi(\xi, \eta)$ identisch erfüllt, wenn für die Geschwindigkeitskomponenten

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \quad \text{bzw.} \quad v = - \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \quad (3.11)$$

gesetzt wird. Angewendet auf die Beziehung 3.10 für Potentialströmungen folgt :

$$\Delta \Psi(\xi, \eta) = 0 \quad (3.12)$$

d.h., daß auch die Stromfunktion $\Psi(\xi, \eta)$ der Laplace-Gleichung genügt. Ein Vergleich der Geschwindigkeitskomponenten zeigt, daß jede Komponente durch ϕ oder Ψ ausgedrückt werden kann.

Die Gleichungen 3.2 und 3.11 liefern mit

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \quad ; \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = - \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}$$

die sog. Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen, aus denen folgt, daß die Gradienten der beiden Funktionen senkrecht aufeinander stehen. Diese Orthogonalitätseigenschaft, die an jeder Stelle ξ, η des Strömungsgebietes erfüllt sein muß, wird z. B.

vorteilhaft bei der Überprüfung einer (graphischen) Lösung ausgenutzt oder findet über die Mathematik der konformen Abbildung eine breite Anwendung.

Insbesondere gestattet die Linearität der Laplace-Gleichungen für ϕ und ψ , daß komplizierte Strömungen durch Überlagerung von einfach zu beschreibenden Grundströmungen zusammengesetzt werden können. Das Superpositionsprinzip und die Orthogonalitätseigenschaft bezüglich ϕ und ψ bleibt auch für komplexe Funktionen $\Omega(z)$ erhalten, solange eine Differenzierbarkeit $d\Omega(z)/dz$ existiert, d.h. wenn die Darstellung $\Omega(z)$ regulär analytisch ist.

In der nachstehenden Übersicht 3.1 sind die Funktionen ϕ und ψ für die Translationsströmung und für einen Potentialwirbel angegeben. Mit diesen einfachen Grundfunktionen $f_i(z)$ und einem noch zu bestimmenden Korrekturglied $g(z)$ läßt sich die Potentiallösung für das Stabgitter analytisch beschreiben.

Tab. 3.1 Analytische Beschreibung der Grundströmungen

Grundströmungen	Potentialfunktion $\Phi(x,y) = \text{Re } \Omega(z)$	Stromfunktion $\Psi(x,y) = \text{Im } \Omega(z)$	Komplexes Potential $\Omega(z) = \Phi + i\Psi$
 Translationsströmung	$U_\infty \cdot x$	$U_\infty \cdot y$	$U_\infty \cdot z$
 Potentialwirbel $\Gamma = \oint \vec{w} d\vec{s}$ $= \vec{w} 2\pi r$	$\frac{\Gamma}{2\pi} y$	$-\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$	$\frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z$

3.2 Das komplexe Potential der Strömung im Stabgitter

Für die angestrebte theoretische Beschreibung des winkelabhängigen Widerstandsverhaltens wird zunächst die Lösung von entsprechend umströmten Ellipsenprofilen herangezogen (vgl. Bild 3.1). Die Auswertung der ebenen Rechnung (Kap. 4) liefert dann einen "Informationsvorrat" von Widerstandsbeiwerten $\xi(\theta, Re)$, wobei diese Daten allerdings nur als Zwischenergebnisse verstanden werden dürfen. Auf dieser Grundlage läßt sich dann ein Modell entwickeln, dessen Ergebnisse eine gute Übereinstimmung mit dem im Experiment beobachteten Verhalten der Stabgitterströmung aufweisen.

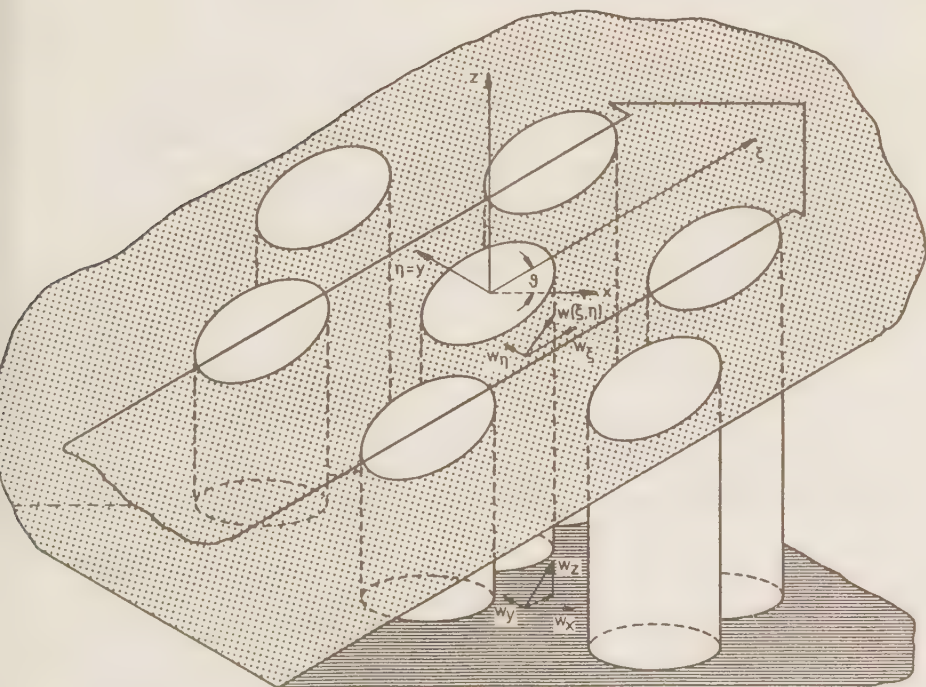


Bild 3.1 Modellierung des schräg angeströmten Stabgitters durch entsprechend umströmte Ellipsenprofile (ebene Zwischenrechnung)

Grundlage für die folgende mathematische Beschreibung ist der von STACHNISS-CARP / 41 / vorgeschlagene Lösungsweg zur Berechnung des komplexen Potentials. Die umströmte Struktur unterliegt dabei der einschränkenden Voraussetzung, daß sich die Konturen L_j der Ellipsen nicht berühren dürfen. Ansonsten braucht die zu rechnende Anordnung nicht notwendigerweise eine Symmetrie- oder Periodizitätseigenschaft aufzuweisen, d.h. die individuelle Lage, die Ellipsenhalbachsen a_j und b_j sowie die Anzahl N der umströmten Konturen sind frei vorgebbar. Das Superpositionsprinzip erlaubt darüberhinaus den zusätzlichen Einbau von Potential-Wirbelpaaren zur Simulation des Ablösegebietes. Die Bestimmung der freien Parameter (Lage, Anzahl und Zirkulationen Γ_j) der Potentialwirbel werden später iterativ in Abhängigkeit von den Ergebnissen der Grenzschichtrechnung festgelegt und seien zunächst als bekannt vorausgesetzt.

Legt man also - entsprechend Bild 3.1 - in die gedachte Anströmebene ein kartesisches Koordinatensystem (ξ, η) , dessen positive Abszissenachse ξ hier immer in Richtung der Anströmgeschwindigkeit $\vec{U}_\infty$ zeigen soll, so sind alle Punkte z des Strömungsgebietes G eindeutig definiert. Das Strömungsgebiet selbst ist durch die Konturlinien L_j der N elliptischen Stabschnitte begrenzt, wobei die Halbachsen a_j und b_j der Ellipsen mit

$$a_j = \frac{D}{2 \sin \theta} \quad \text{und} \quad b_j = \frac{D}{2} = \text{const} \quad ; \quad 0 < \theta < 90^\circ \quad (3.13) \\ j = 1, 2 \dots N$$

für jeden Anströmwinkel θ eindeutig festgelegt sind.

Die weitere Analyse wird wesentlich vereinfacht, wenn man sich auf regelmäßig aufgebaute Stabgitter beschränkt, wenn also die Quer- bzw. Längsteilung sowie der Stabdurchmesser D der betrachteten Anordnung als Konstante zu behandeln sind, d.h.

$$a_j = a = D/2 \sin \theta \quad , \quad j = 1, 2 \dots N$$

$$= \text{const}$$

$$b_j = b = D/2$$

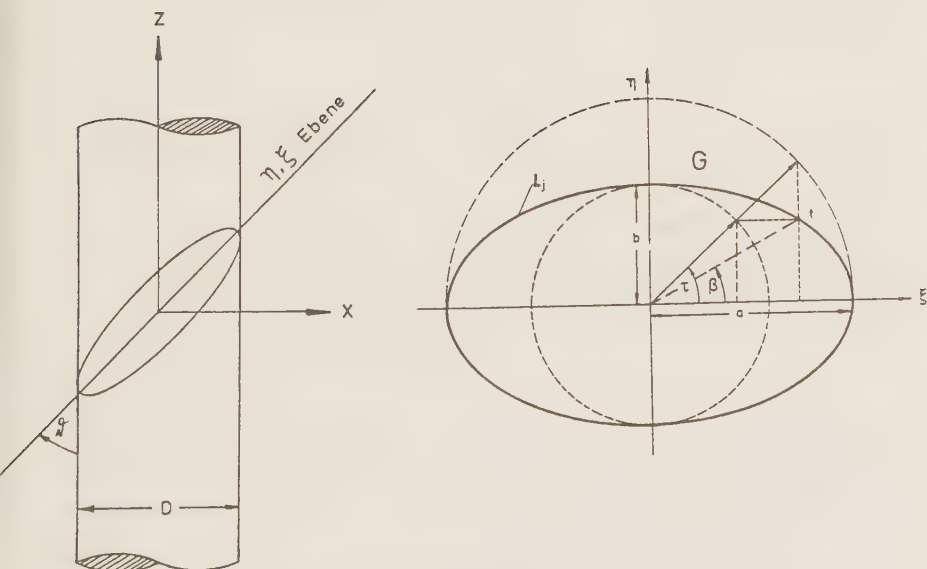


Bild 3.2 Geometrie der ebenen Schnittprofile
($\theta = \text{const}$)

Jeder Punkt einer beliebigen Ellipse L_j , deren Mittelpunktverschiebung gegenüber dem Koordinatenursprung durch die komplexen Koordinate M_j festgelegt ist, genügt unter Verwendung der Parameterdarstellung nach Bild 3.2 der Gleichung :

$$t_j = M_j + a \cos \tau + i b \sin \tau \quad ; \quad t = \xi + i \eta \in L_j \quad (3.14)$$

mit

$$M_j = \alpha_j + i \beta_j \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (3.15)$$

Das komplexe Potential der Strömung sei mit

$$\Omega(z) = \Phi(z) + i \Psi(z) \quad (3.16)$$

definiert, wobei der Realteil von $\Omega(z)$ der in Kap. 3.1 definierten Potentialfunktion Φ und der Imaginärteil der Stromfunktion Ψ entspricht.

$$\operatorname{Re} \Omega(z) = \Phi(\xi, \eta) \quad (3.17)$$

$$\operatorname{Im} \Omega(z) = \Psi(\xi, \eta) \quad (3.18)$$

Mit Hilfe der in Tab. 3.1 zusammengefaßten Ausdrücke für die analytisch darstellbaren Grundströmungen, läßt sich für $\Omega(z)$ (aufgrund der Gültigkeit des Superpositionsprinzips) für die Strömung um N Ellipsen ein Ansatz formulieren, der zunächst allgemein durch :

$$\Omega(z) = U_\infty z + \sum_{l=1}^w \frac{\Gamma_l}{2\pi i} \ln(z - W_l) + i g(z) \quad ; \quad z \in G \quad (3.19)$$

$z \neq W_l$

$$W_l = \alpha_l + i \beta_l$$

darstellbar ist.

Die komplexe Koordinate W_l beschreibt die Lage der w Wirbel, während die Korrekturfunktion $g(z)$ die gegenseitige Beeinflussung der umströmten Konturen berücksichtigt.

Sie kann nach / 41/ durch die Summe von N unendlichen, gleichmäßig konvergente Reihen approximiert werden.

Mit

$$g(z) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} S_{k,j} \cdot T_j^k \quad (3.20)$$

und den noch unbekannten komplexen Koeffizienten :

$$\begin{aligned} S_{k,j} &= R_{k,j} + i Q_{k,j} & ; R_{k,j}, Q_{k,j} \text{ reell ,} \\ j &= 1, 2, \dots N \\ k &= 1, 2, \dots \infty \end{aligned} \quad (3.21)$$

sowie dem Ausdruck für die Funktion T_j :

$$T_j = \frac{z - M_j - \sqrt{(z - M_j)^2 - (a^2 - b^2)}}{a + b} ; |T_j| < 1 ; z \in G \quad (3.22)$$

$j = 1, 2, \dots N$

ergibt sich eine Formulierung für $\Omega(z)$, die - wie noch gezeigt wird - für eine numerische Aufbereitung zur Bestimmung der Konstanten $S_{k,j}$ gut geeignet ist.

Der Ansatz 3.19, insbesondere die Multiplikation der Korrekturfunktion $g(z)$ mit der imaginären Größe i wurde so gewählt, daß die Lösung in hinreichend großer Entfernung von dem betrachteten Ellipsenbündel in die ungestörte Translationsströmung übergeht.

Von der zu ermittelnden Lösung ist bekannt, daß die Konturlinien L_j der umströmten Körper selbst Stromlinien sind, d. h., daß für den Imaginärteil des komplexen Potentials entsprechend Gl. 3.18

$$\operatorname{Im} \Omega(z) \Big|_{z=t \in L_j} = \Psi(\xi, \eta) \Big|_{t=\xi+i\eta \in L_j} = C_j ; j = 1, 2, \dots N \quad (3.23)$$

zu fordern ist.

Für die weitere Rechnung betrachtet man zunächst die rein imaginären Anteile von Ansatz 3.19 und findet unter Berücksichtigung der Randbedingung 3.23 für alle Konturpunkte t :

$$\begin{aligned} t &\in L_j, \quad t \neq W_1 \\ \operatorname{Re} g(t) &= C_j - U_\infty \eta + \sum_{l=1}^W \left\{ \frac{\Gamma_l}{2\pi} \ln |t - W_l| \right\}, \quad \eta = \operatorname{Im} t \\ l &= 1, 2, \dots, W \\ j &= 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (3.24)$$

Im nächsten Schritt wertet man den mit Gl. 3.20 gegebenen Reihenansatz bezüglich seiner Realteile aus und vergleicht das Ergebnis mit der obigen Beziehung 3.24. Man erhält :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} g(t) &= \operatorname{Re} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} S_{k,j} \cdot T_j^k \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} \{ R_{k,j} \operatorname{Re} T_j^k - Q_{k,j} \operatorname{Im} T_j^k \} \\ &= C_j - U_\infty \eta + \sum_{l=1}^W \left\{ \frac{\Gamma_l}{2\pi} \ln |t - W_l| \right\} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Um die Variable η sukzessive für jede der N unendlichen Reihen von Gl. 3.25 zu eliminieren bietet sich die oben eingeführte Parameterdarstellung für die Beschreibung der Ellipse L_j an. Man setzt also

$$\begin{aligned} \eta &= \operatorname{Im} t \\ \eta &= \beta_j + b \sin \tau, \quad t = \xi + i\eta \in L_j \\ j &= 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (3.26)$$

in Gl. 3.25 ein, multipliziert die erhaltenen Gleichungen mit der Konstanten $(2\pi^{-1})$ und löst anschließend nach den Konstanten C_j auf. Nun können alle Gleichungen (auf beiden Seiten) über

ihre Mittelpunktswinkel τ von 0 bis 2π gliedweise integriert werden, da die gleichmäßige Konvergenz der unendlichen Reihen wegen $|T_j| < 1$ gewährleistet ist. Damit ergeben sich die folgenden Bestimmungsgleichungen für die Konstanten C_j zu :

$$C_j = U_\infty \beta_j - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^W \left\{ \frac{\Gamma_l}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|t - w_l| d\tau \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_{k,j} \operatorname{Re} T_j^k d\tau \right. \right. \quad ; \quad t \in L_j \quad (3.27) \\ \left. \left. - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_{k,j} \operatorname{Im} T_j^k d\tau \right\} \right. \\ \left. \right. \quad j = 1, 2, \dots, N$$

Dieses Gleichungssystem 3.27 für die Größen C_j ist aufgrund der durchgeführten Integrationen unabhängig von Gleichung 3.25 und enthält auf der rechten Seite nur noch die unbekannten reellen Konstanten $R_{k,j}$ und $Q_{k,j}$ der gesuchten komplexen Größen $S_{k,j}$. Durch eine Substitution der Terme C_j in Gl. 3.25 mit Hilfe der oben gewonnenen Gleichungen 3.27 ergeben sich N lineare Basis-Gleichungen 3.28, die zur Bestimmung der gesuchten Unbekannten herangezogen werden können:

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} R_{k,j} \operatorname{Re} \left\{ T_j^k - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_j^k d\tau \right\} - \\ \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} Q_{k,j} \operatorname{Im} \left\{ T_j^k - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_j^k d\tau \right\} = \quad (3.28) \\ \sum_{l=1}^W \frac{\Gamma_l}{2\pi} \left\{ \ln|t - w_l| - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|t - w_l| d\tau \right\} - U_\infty b \sin \tau \\ ; \quad t \in L_j \\ j = 1, 2, \dots, N$$

Der Lösungsalgorithmus für die approximative Bestimmung der gesuchten komplexen Koeffizienten $S_{k,j}$ ist bei JOPPICH / 13 / beschrieben. Grundlage des Verfahrens ist eine Ausgleichsrechnung, wie sie häufig bei der Analyse von Meßwerten benutzt wird. Die unendlichen Reihen werden dazu nach einem vorzugebenden p-ten Glied abgebrochen. Auf den N Ellipsenkonturen L_j , $j = 1 \dots N$ werden jeweils m Stützpunkte $t_{i,j}$, $i = 1 \dots m$ erzeugt und zu diesen die auswertbaren Terme der rechten und linken Seiten des Gleichungssystems berechnet. Die für jeden Punkt

$$t_{i,j} = M_j + a \cos((i-1)\Delta\tau) + i b \sin((i-1)\Delta\tau) \quad (3.29)$$

$$i = 1, 2, \dots m$$

$$j = 1, 2, \dots N$$

$$\Delta\tau = 2\pi / (m-1)$$

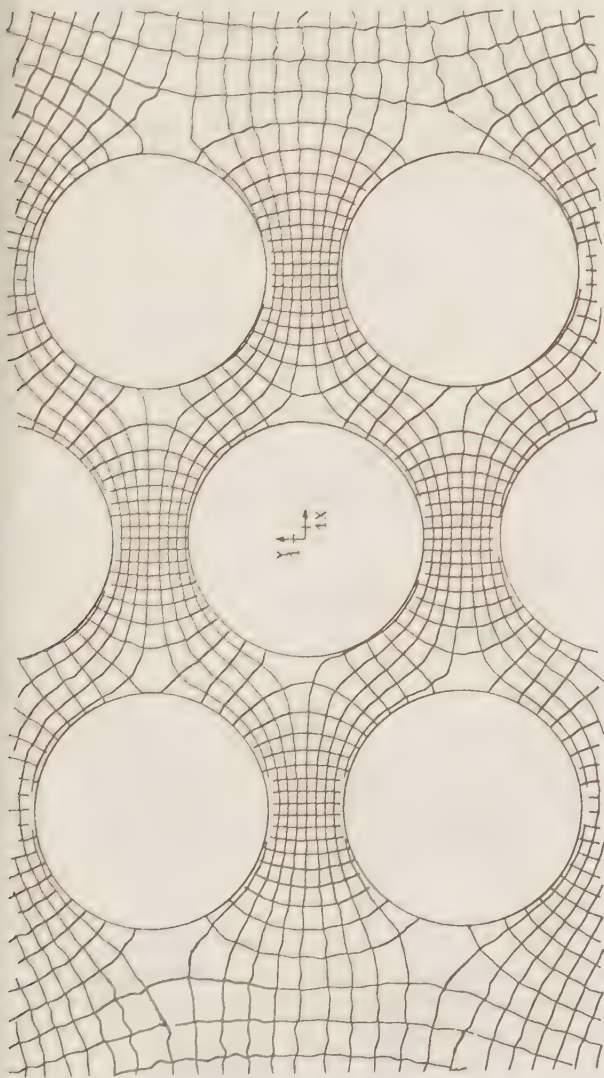
vollständig gegebenen rechten Seiten bilden dann die "Meßwerte", während die linken Seiten einer linearen Funktion mit den noch unbekannten Parametern $R_{k,j}$ und $Q_{k,j}$ entsprechen.

Konvergenzstudien mit dem eingesetzten Rechenverfahren zeigen, daß im Mittel schon nach 5 - 10 Iterationsschritten der relative Restfehler unter 5 % sinkt. Danach nimmt die Konvergenzgeschwindigkeit i.a. deutlich ab. Dieses asymptotische Verhalten wird durch die Anzahl der gerechneten Stützpunkte sowie dem Abbruchfehler aus den unendlichen Reihen bestimmt.

Mit den gefundenen Koeffizienten $S_{k,j}$ ist die Lösung dann allerdings für beliebige Punkte $z \in G$ bekannt und das komplexe Potential

$$\Omega(z) = \Phi(z) + i \Psi(z)$$

auswertbar. Ein Abtasten innerhalb eines gewünschten Ausschnittes des Strömungsgebietes G nach Werten Φ bzw. $\Psi = \text{const}$ liefern die Potential- bzw. Stromlinienfelder, die einen optischen Eindruck über die Güte der Lösung vermitteln. (Orthogonalitätseigenschaft - vgl. Bild 3.3)



STROM- UND POTENTIALLINIEN DES STROMUNGSGEBIETES ($\Omega = \Phi + i\psi$)

ELLIPSEN-KONFIGURATION 7 OHNE POTENTIALWIRBEL

STABDURCHMESSER: $D = 20.00$ MM

STABMITTELPUNKTSABSTAND: $S = 26.40$ MM

ANSTROMWINKEL: $\gamma = 30.00^\circ$, $\varphi = 89.00^\circ$

ANSTROMGESCHWINDIGKEIT: $U = 1.00$ M/S

RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
LEHRSTUHL FÜR REAKTORTECHNIK
PROF. DR. RER. NAT. A. ZIEGLER

Bild 3.3 Lösung des komplexen Potentials $\Omega(z) = \Phi + i\psi$

Orthogonalitätsnachweis $\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}$ bzw. $\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi}$

Durch Differenzieren des komplexen Potentials erhält man das konjugiert komplexe Geschwindigkeitsfeld der Strömung. Aus dem vollständigen Differential von $\Omega(z)$ und $dz = d\xi + i d\eta$ folgt :

$$\begin{aligned} d\Omega(z) &= \frac{\partial\Omega}{\partial\xi} d\xi + \frac{\partial\Omega}{\partial\eta} d\eta = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + i \frac{\partial\Psi}{\partial\xi} \right) d\xi + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} + i \frac{\partial\Psi}{\partial\eta} \right) d\eta \\ &= (u - i v) d\xi + (v + i u) d\eta \\ &= (u - i v) (d\xi + i d\eta) \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\frac{d\Omega(z)}{dz} = u - i v \quad (3.31)$$

Durch einfaches Negieren des Imaginärteils ist damit auch das ebene Vektorfeld der Geschwindigkeitsverteilung bekannt.

$$\left| \vec{w} \right| = \left| \frac{d\Omega}{dz} \right| \quad ; \quad \vec{w}(\xi, \eta) = u \vec{e}_\xi + v \vec{e}_\eta \quad (3.32)$$

Damit können alle interessierenden Daten wie Konturgeschwindigkeiten für die Grenzschichtrechnung, Geschwindigkeitsprofile an beliebigen Stellen der gerechneten Anordnung sowie (über eine Integration) auch die Durchsätze zwischen den Stäben angegeben werden.

In Bild 3.4 sind zwei Beispiele aufgeführt. Die Graphik belegt, daß die angestrebte Simulation des "unendlichen" Gitterverbandes für die unmittelbare Umgebung des Zentralstabes durch die 19 gerechneten Konturen ausreichend gewährleistet ist.

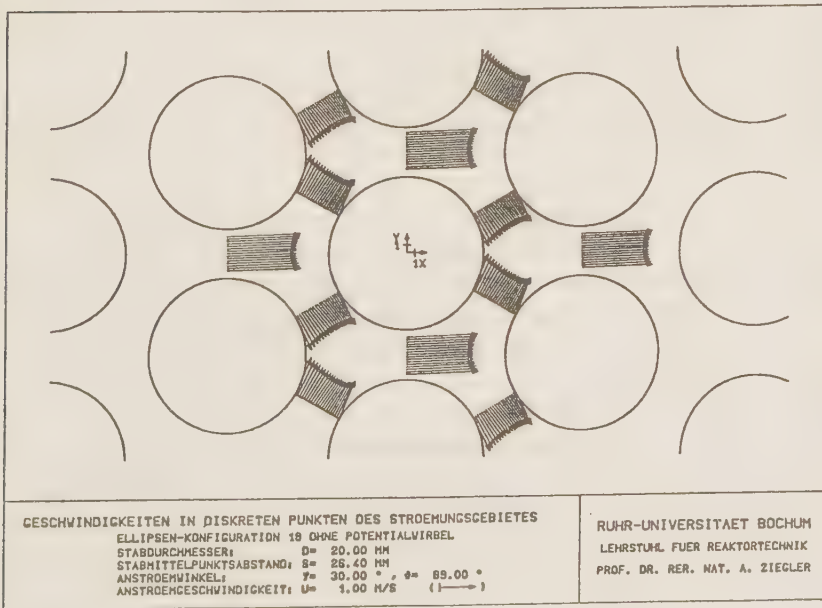
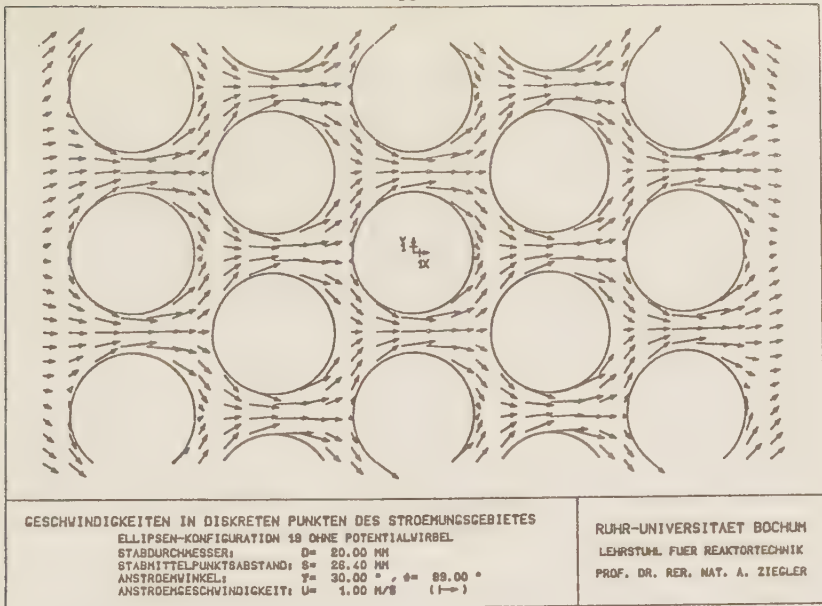


Bild 3.4 Ebenes Vektorfeld $\vec{w}(\xi, \eta)$ der Geschwindigkeitsverteilung ($\Gamma = 0$) (Periodizitätsnachweis zur Simulation einer "unendlichen" Stabgitter-Anordnung)

3.3 Potential-theoretische Simulation des Ablösegebietes

Streng genommen dürfen Potentiallösungen als Randbedingung für eine Grenzschichtrechnung nur für solche Strömungsprobleme herangezogen werden, bei denen keine oder nur geringfügige Ablöseerscheinungen auftreten. Bei stumpfen Körpern, wie z.B. dem senkrecht angeströmten Zylinder, weicht das theoretisch ermittelte Ergebnis u. U. deutlich von dem experimentellen Befund ab. Insbesondere bei der laminaren Grenzschicht, also bei $Re < Re_{krit}$ löst die Strömung schon bei einem Winkel $\phi_a \approx 82^\circ$ ab, während die Rechnung die Ablösestelle kurz hinter dem theoretischen Druckminimum bei etwa 105° voraussagt. Diese Diskrepanz ist darauf zurückzuführen, daß die reale, azimuthale Druckverteilung vor allem im Anströmschatten des Zylinders erheblich vom potential-theoretischen Verlauf abweicht.

Eine gewisse theoretische Approximation des realen Verhaltens läßt sich dadurch erreichen, indem man die fiktive Kontur eines entsprechenden "Ersatzkörpers" als Berechnungsgrundlage für die Potentialtheorie heranzieht. Die im voranstehenden Kap. 3.2 abgeleitete Mathematik des komplexen Potentials erlaubt eine zusätzliche Superposition von w beliebig angeordneten Potentialwirbeln mit einer individuellen, frei variierbaren Wirbelstärke Γ_w , deren Drehsinn jeweils durch das Vorzeichen festgelegt ist.

Die theoretische Formulierung läßt demnach drei Freiheitsgrade für eine Simulation des Totwassergebietes zu. An dieser Stelle soll ausdrücklich darauf hingewiesen werden, daß die im Folgenden diskutierte Modellierung des Ablösegebietes nicht den Anspruch einer mathematisch-physikalischen Beschreibung der Vorgänge im Ablösegebiet erhebt, sondern nur die Aufgabe hat, die Gesamtlösung in dem Sinne zu verbessern, daß einerseits dem realen Verhalten Rechnung getragen wird und andererseits eine physikalisch begründete Druckrandbedingung für die Grenzschichtrechnung erreicht werden soll.

Die hier gewählte Modellvorstellung ist in Bild 3.5 qualitativ dargestellt. Danach wird das Ablösegebiet grundsätzlich nur durch ein Wirbelpaar simuliert, dessen Drehsinn jeweils durch die Richtung der Außenströmung festgelegt ist. Das zusätzliche Einbringen von Sekundärwirbel mit evtl. unterschiedlichen Wirbelstärken Γ_1 erscheint überflüssig, da diese Maßnahme lediglich eine Verkomplizierung des mathematischen Aufwandes mit sich bringt, ohne die "physikalische Güte" des Modells an sich zu verbessern. Mit dieser Vorgabe sind also nur noch zwei freie Parameter zu bestimmen. Als Argumentationshilfe für eine quantitative Abschätzung dieser Variablen wird an die in Kap. 2.2 angesprochene experimentelle Beobachtung erinnert, daß der Druck hinter der Ablösestelle ① in guter Näherung konstant ist. Überträgt man den oben angesprochenen Gedanken der "Ersatzkörperrechnung" auf das hier vorliegende Problem, so gilt über die BERNOULLI-Beziehung : daß entlang der Hilfsgeraden ① — ③, - die eine erste Abschätzung für den Verlauf der Ablösestromlinie darstellen soll -, dem konstanten Druckverlauf eine konstante Geschwindigkeit $|w_{13}|$ zugeordnet werden kann.

$$p + \rho/2 w^2 = \text{const}$$

$$\text{bzw.} \quad p_a + \rho/2 w_a^2 \approx p_3 + \rho/2 w_3^2$$

$$\text{mit} \quad p_a \approx p_3 \rightarrow w_a \approx w_3 \approx w_{13} = \text{const}$$

Da die Koordinaten der Ablösestelle ① und die dazugehörige Konturgeschwindigkeit $w_1 = w_a$ durch die erste Grenzschichtrechnung feststehen, ermittelt man zunächst entlang der Symmetrielinie ④—③ die Lage der betragsmäßig gleich großen Geschwindigkeit $|w_3|$.

Zur Begründung der durchgeführten geometrischen Festlegung der Ablöseform, wird auf die Aussagen der Bilder 2.1 und 2.2 in Kap. 2.2 verwiesen. Danach wandert mit zunehmender Re-Zahl der Ablösepunkt stromabwärts, d. h. die Tendenz des kleiner werden des Ablösegebietes wird vom Modell richtig erfaßt. Darüberhinaus erhärten energetische Überlegungen die naheliegende Vermutung, daß die Strömung ohne wesentliche Beschleunigung bzw. Verzögerung diesen Bereich des Ablösegebietes passiert.

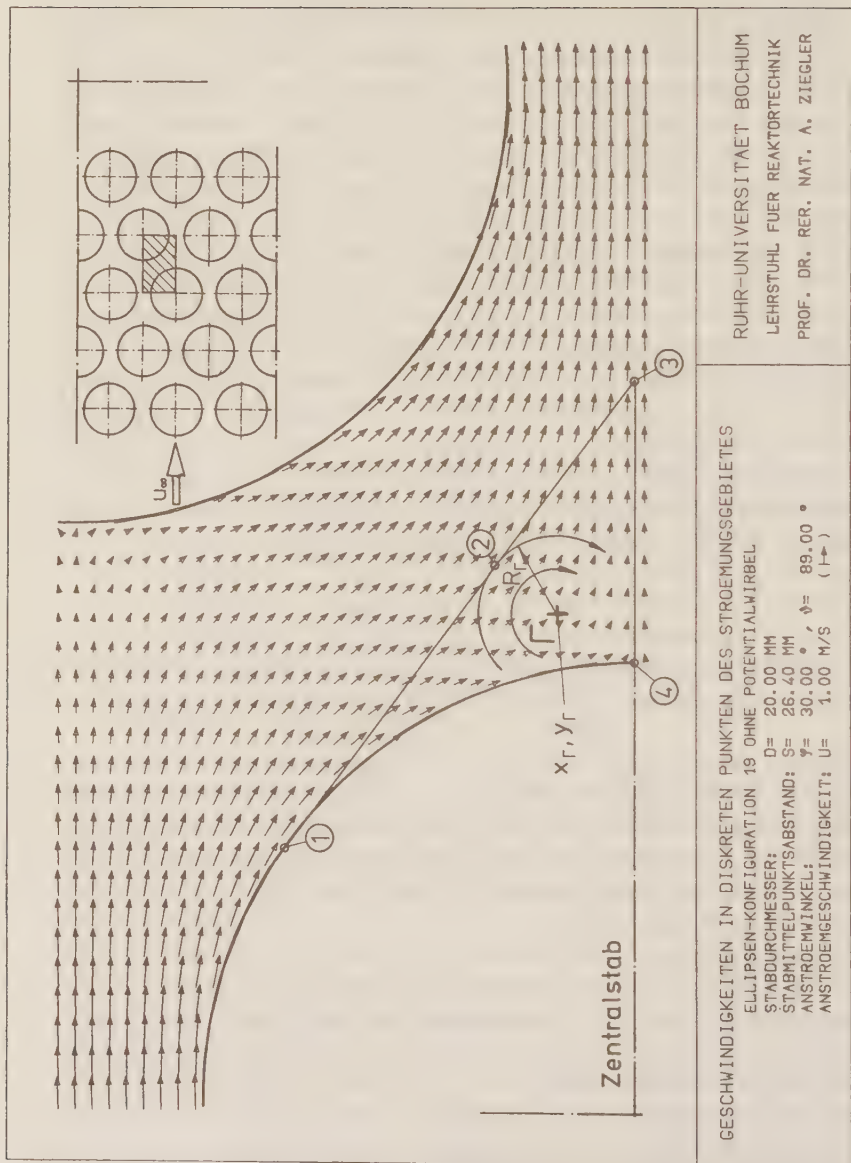


Bild 3.5 Modellierung des Ablösegebietes durch Potentialwirbelpaare $\Gamma_w \neq 0$

RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
LEHRSTUHL FÜR REAKTORTECHNIK
PROF. DR. RER. NAT. A. ZIEGLER

Da die hier entwickelte Modellvorstellung lediglich zur Abschätzung der Größenordnung der freien Parameter dient, ist es naheliegend, die Wirbel in den Flächenschwerpunkt von $\textcircled{1}-\textcircled{3}-\textcircled{4}$ zu positionieren, um über die dann bekannte Strecke R_Γ die gesuchte Wirbelstärke Γ_w quantifizieren zu können. Mit dem Ansatz:

$$\Gamma_w = 2\pi R_\Gamma \left| (w_a - w_2) \right| \quad (3.33)$$

genügt man einerseits der oben begründeten Forderung $w \approx \text{const}$ entlang der "Ablösestromlinie" $\textcircled{1}-\textcircled{2}-\textcircled{3}$ und erhält andererseits eine brauchbare Abschätzung für die gesuchte Größe Γ_w .

Eine erneute Rechnung mit $\Gamma_w \neq 0$, aber sonst denselben Bedingungen, ist in Bild 3.6 zu Vergleichszwecken dargestellt. Der Einfluß der beschriebenen Maßnahme, d. h. die Verdrängungswirkung der eingebauten Wirbelpaare auf die benachbarten Stromlinien ist deutlich ausgeprägt und gleicht dem experimentell beobachteten Ablöseverhalten.

Eine Änderung der azimuthalen Anströmrichtung um 30° ergibt erwartungsgemäß ein völlig anderes Ablösebild (Gassenströmung). Die Schattenflächen der Stäbe in Strömungsrichtung sind fast vollständig als Wirbelgebiet ausgebildet (Bild 3.7).

Der im vorigen Kap. 3.2 beschriebene mathematische Formalismus ist völlig allgemein programmiert, d.h., daß zusätzlich jede Kontur mit beliebigen Wirbelströken Γ_i überlagert werden kann.

Die Eindeutigkeit einer Potentiallösung ist durch die KUTTA - JOUKOWSKY'sche Abflußbedingung gewährleistet. Sie ist im Gitterverband dadurch gegeben, daß bei einem bestimmten Azimutalwinkel ϕ die Anströmrichtung beibehalten werden muß. Diese Bedingung ist mit $\Gamma_i \equiv 0$ für jedes regelmäßig aufgebaute, unendliche Stabgitter in Richtung der Symmetrieachsen erfüllt. Dasselbe gilt dann auch für beliebige Azimutalwinkel ϕ , da eine Lösung durch Superposition der beiden symmetrischen Fälle denkbar ist.

Bedingt durch die tatsächlich gerechnete, endliche Anordnung verschiebt sich insbesondere am Rand des betrachteten Bündels die Lage der Staupunkte. Dieser Effekt kann durch die oben angesprochene, individuelle Überlagerung von Zirkulationen mit der Wirbelstärke Γ_i kompensiert werden. Die daraus resultierende Verschiebung der Staupunkte in einer Strömung um N-Hindernisse ist in /54/ beschrieben.

Die hier gerechnete Anordnung von 7 bzw. 19 umströmten Konturen erlaubt dennoch im Sinne der gewünschten Genauigkeit eine akzeptierbare Approximation der Verhältnisse im unendlichen Gitterverband. Diese Näherung ist deshalb möglich und vertretbar, da einerseits die Profile zwischen den Stäben abgegriffen und auf den gewünschten zu simulierenden Durchsatz hochgerechnet und andererseits die interessierenden Daten nur an einer repräsentativen Kontur (Zentralstab) zur Auswertung herangezogen werden. Durch Zuordnung dieser Daten auf jeden Stab im Kontrollraum ergibt sich dann eine Beschreibung des unendlichen Gitterverbandes, deren mathematische Ableitung in Kap. 4.2 erläutert ist.

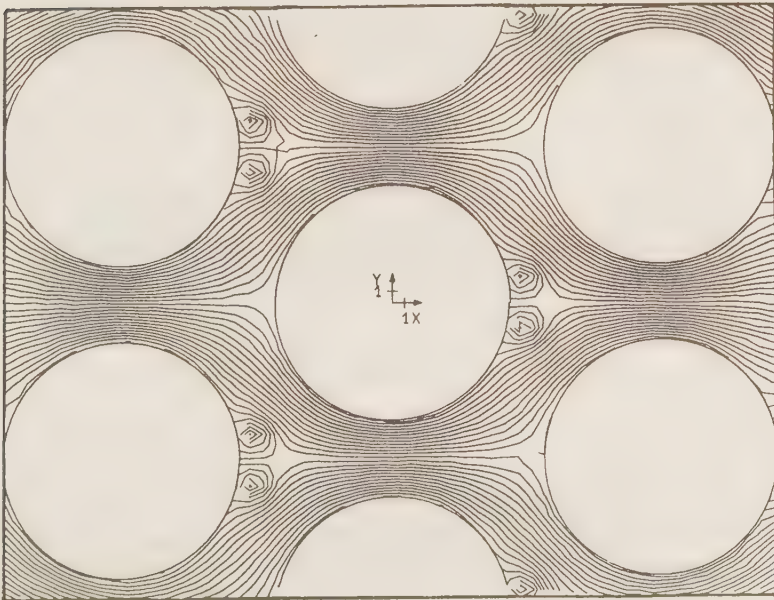
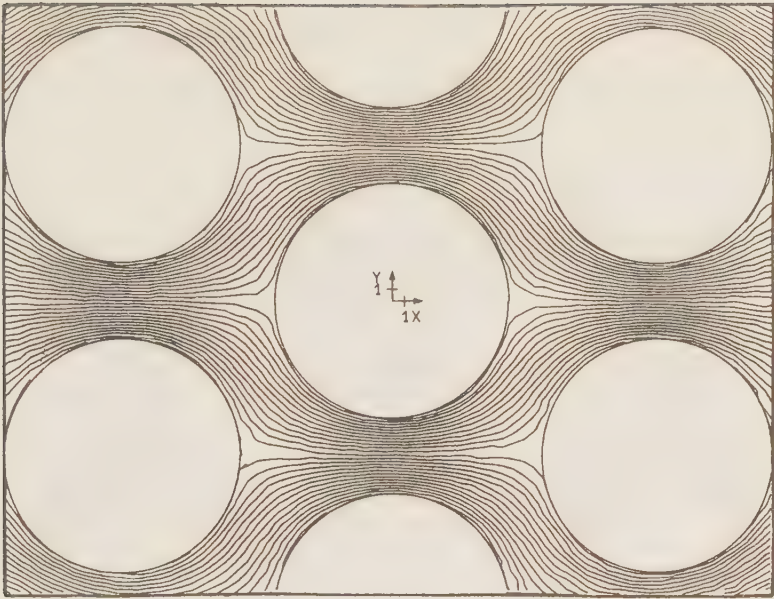


Bild 3.6 Stromlinienverlauf $\Psi = \text{const}$ in der vollständig versetzten Anordnung (hier: Azimutalwinkel $\phi = 30^\circ$)
 a) $\Gamma_w = 0$; b) $\Gamma_w \neq 0$

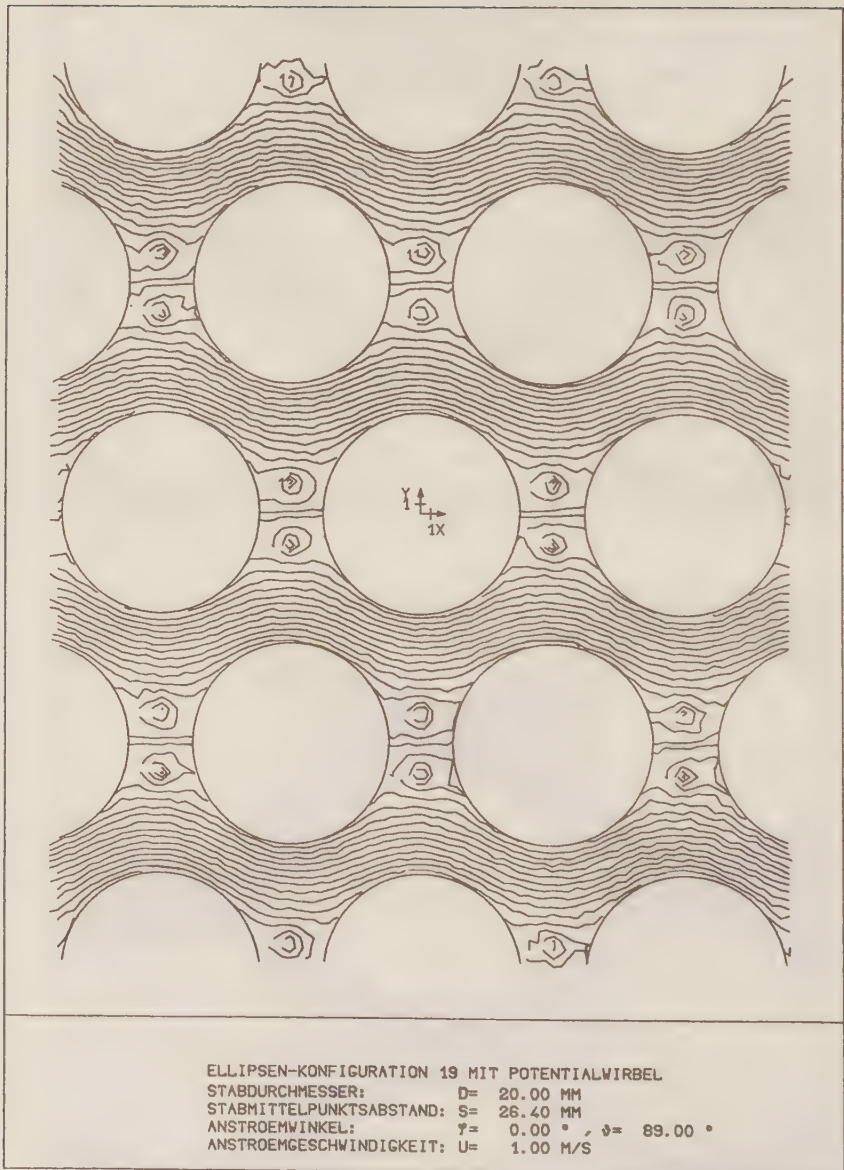


Bild 3.7 Stromlinienverlauf $\Psi = \text{const}$ in der fluchtend versetzten Anordnung (hier: Azimutalwinkel $\phi = 0^\circ$)

4. Auswertung des Impulsintegrals

4.1 Physikalische Analyse der Einzelbeiträge

Die nachfolgend gegebene Darstellung der Impulsbilanzierung in integraler Form wird aufgrund der zentralen Bedeutung ihrer physikalischen Aussagen bewußt sehr ausführlich abgehandelt, da die abgeleiteten Ergebnisse das Verständnis für die physikalischen Zusammenhänge erleichtern.

Dem Fluid soll zunächst eine beliebige physikalische Eigenschaft ϵ zugeordnet sein, wobei ϵ stellvertretend eine skalare oder vektorielle Größe charakterisiert (Dichte, Geschwindigkeit, Masse, Impuls, Energie etc.).

Die resultierende Eigenschaft $\vec{E}$ eines definierten größeren Volumens V kann dann immer durch

$$\vec{E} = \int_{V(t)} \vec{\epsilon} \, dV \quad ; \quad \begin{array}{ll} \epsilon = \epsilon(\vec{r}, t) & \text{skalare Größe} \\ \vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}(\vec{r}, t) & \text{vektorielle Größe} \end{array} \quad (4.1)$$

beschrieben werden.

In der hier benutzten Euler'schen Darstellung läßt sich die totale Änderung $d\vec{E}/dt$ bei raumfesten Volumen V und der dazugehörigen raumfesten Kontrolloberfläche K mit

$$\frac{d\vec{E}}{dt} = \int_V \frac{\partial \vec{\epsilon}}{\partial t} \, dV + \int_K \vec{\epsilon} \, dQ \quad ; \quad dQ = \vec{w} \, d\vec{A} \quad (4.2)$$

angeben, wenn der Eigenschaft ϵ eine örtliche Bewegung $\vec{w}$ zugeordnet wird / 30 / . Das erste Integral stellt also die zeitliche Änderung der Eigenschaften $\vec{\epsilon}$ im Inneren dar. Dieser lokale Anteil $\partial \vec{E} / \partial t$ verschwindet bei stationärer Bewegung.

Der zweite Term beschreibt den Fluß der Eigenschaften über die Kontrollfläche K. Eine Massenbilanzierung ($E = m$, $\epsilon = \rho$) im Kontrollvolumen ergibt danach sofort die Kontinuitätsbedingung mit :

$$\frac{dm}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_K \rho dQ = 0 \quad (4.3)$$

bzw. für den stationären, inkompressiblen Fall:

$$\int_K dQ = \int_K \vec{w} d\vec{A} = 0 \quad (4.4)$$

Jedem Volumen-Element dV des strömenden Fluids mit der Masse $dm = \rho dV$ soll nun die Geschwindigkeit $\vec{w}$ zugeordnet sein. Dann trägt jedes Volumen-Element dV den Impuls

$$d\vec{I} = dm \vec{w} = \rho \vec{w} dV \quad (4.5)$$

mit sich. Bekanntlich ergibt die zeitliche Änderung des Impulses einer abgegrenzten Masse die Summe der an ihr angreifenden Kräfte :

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \vec{R} \quad (4.6)$$

oder mit Gl. 4.2 ($E = I$, $\epsilon = \rho \vec{w}$)

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{w} dV + \int_K (\rho \vec{w}) \vec{w} d\vec{A} = \vec{R} \quad (4.7)$$

Für die hier interessierende stationäre Betrachtung ($\partial/\partial t = 0$)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{w} dV \equiv 0 \quad (4.8)$$

vereinfacht sich die Vektorgleichung 4.7 um den instationären Beitrag. Die zu integrierenden Größen $\rho \vec{w}$ stellen von ihrem physikalischen Charakter demnach eine Impulsdichte multipliziert mit dem Volumenstrom $dQ = \vec{w} d\vec{A}$ dar. Der verbleibende Integralausdruck bilanziert offensichtlich somit den Impulsstrom über die Kontrollflächen.

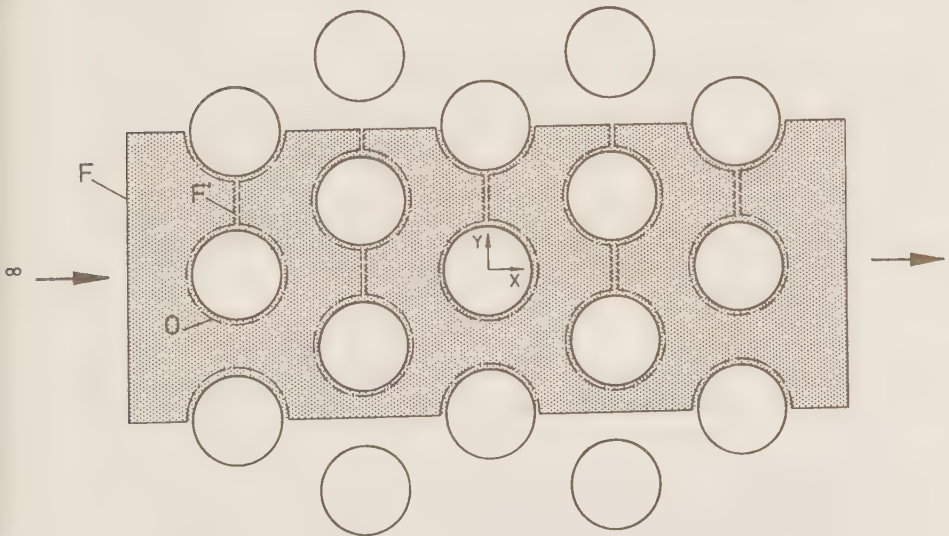


Bild 4.1 Kontrollraum im Stabbündel zur Auswertung der Einzelbeiträge des Impulsintegrals

Für die weitere Analyse des Impulsintegrals ist in Bild 4.1 die Draufsicht über den zu integrierenden Kontrollraum schematisch skizziert, wobei die axialen Begrenzungsflächen des Kontrollvolumens parallel zur Anströmebene ausgerichtet sein sollen.

Die raumfeste Integrationsfläche K erhält durch die zu erfassenden Strukturen eine komplizierte Geometrie; jedoch läßt sie sich formal ohne Beschränkung der Allgemeinheit durch

$$\int_K \rho \vec{w} dQ = \int_F \rho \vec{w} dQ + \int_{F'} \rho \vec{w} dQ + \int_O \rho \vec{w} dQ \quad (4.9)$$

additiv zusammensetzen. Das Integral für die zusammenfallenden Teile der Kontrollfläche (F') verschwindet, da die ein- und austretenden Impulsströme sich gegenseitig aufheben:

$$\int_{F'} \rho \vec{w} dQ \equiv 0 \quad (4.10)$$

Dasselbe gilt für die Integration über die Strukturoberfläche O wegen $dQ = 0$, sofern an der Körperoberfläche nicht abgesaugt oder ausgeblasen wird.

$$\int_O \rho \vec{w} dQ \equiv 0 \quad (4.11)$$

Das verbleibende Integral über die Fluidfläche F liefert nur dann keinen Beitrag, wenn die ein- und ausströmenden Volumenströme dQ gleich sind und gleiche Geschwindigkeitsprofile $\vec{w}(x,y)$ über den Integrationsflächen F vorliegen. Diese Voraussetzungen können im Experiment durch Ausgleichsvorrichtungen (Siebe, Gleichrichter etc.) vor und hinter der Anordnung bzw. durch entsprechende Anlaufstrecken realisiert werden. Für die theoretische Analyse folgt daraus unmittelbar eine Forderung bezüglich der zu rechnenden Minimalkonfiguration, d. h. zur

Simulation eines repräsentativen Stabes aus einer unendlichen Anordnung müssen mindestens soviele Nachbarstäbe mitgerechnet werden, daß die geforderte

Periodizität von Durchsatz und Geschwindigkeitsprofilen bezüglich sich wiederholender Zellstrukturen im Gitter gewährleistet ist und nachgewiesen werden kann.

An dieser Stelle wird der "elliptische Charakter" der Strömung deutlich, d. h. die gegenseitige Wechselwirkung zwischen Struktur und Fluid bewirkt auch "stromaufwärts" eine Beeinflussung des Strömungsfeldes. Dieser Effekt erhält sich zwar bei der strengen theoretischen Formulierung bis ins "Unendliche"; klingt aber rasch mit zunehmendem Abstand vom betrachteten "Zentralstab" ab. Zumindest muß eine "Nahfeldanalyse" in der Umgebung des betrachteten Bündels diese Fundamentalforderung bestätigen.

Berücksichtigt man im weiteren diese qualitativ formulierten Aussagen, die sich rein formal aus der Integration des Impulsintegrals ergeben, so erhält man schließlich für den ersten Term von Gl. 4.9 :

$$\int_F \rho \vec{w} dQ \equiv 0 \quad (4.12)$$

Die gefundenen Gleichungen 4.10 - 4.12 bleiben auch dann erhalten, wenn - wie noch gezeigt wird - eine Schräganströmung des Stabgitters simuliert werden soll. Durch eine Volumen-Integration aller Geschwindigkeitsvektoren in einer repräsentativen Einheitszelle, läßt sich eine Bezugsgröße $\vec{u}$ definieren, die an dieser Stelle zunächst noch ohne nähere Begründung eingeführt wird:

$$\vec{u} = \frac{1}{V_F} \int_{V_F} \vec{w} dV \quad ; \quad V_F = \text{Fluidvolumen} \quad (4.13)$$

Die Integration hebt somit die Geschwindigkeitsverteilung aus $\vec{w}(x,y,z)$ der Feinstruktur heraus und man erhält statt dem Vektorfeld eine resultierende Größe $\vec{u}$, deren Einheitsvektor $\vec{e}_u$ die Richtung des Massentransportes angibt. Diese "Massentransportgeschwindigkeit" $\vec{u}$ führt zur Theorie des Quasi-Kontinuums und ist vorerst hier nur als integrale Bezugsgröße zu verstehen. Wichtig in diesem Zusammenhang ist zunächst nur die Tatsache, daß neben dem Anströmwinkel θ , der durch die Richtung von $\vec{u}$ und der Stabachse definiert ist, das eingeführte Kontrollvolumen immer in Richtung $\vec{e}_u$ mitgedreht wird. Damit liegt die Ebene von $\vec{u}$ immer parallel zu den beiden axialen Begrenzungsflächen des Kontrollraumes, und jeder Stab im Kontrollraum wird unter demselben Anströmwinkel θ von der oben definierten integralen Größe $\vec{u}$ angeströmt. Konsequenterweise erlaubt dann die Definition von $\vec{u}$ auch eine ebene Rechnung in dieser Anströmebene (ξ, η - Ebene), wenn die erhaltenen Ergebnisse mit der Bezugsgröße $\vec{u}$ korreliert werden.

Diese Schlußfolgerung erhält insofern eine tiefere Bedeutung im Zusammenhang mit der Analyse des Impulsintegrals, weil damit ein Beitrag normal zur Strömungsebene $\vec{e}_u$ ausgeschlossen ist.

Die Aussagen der Gleichungen 4.10 - 4.12 werden auch dann nicht verletzt, wenn - wie in Kap. 5.1 gezeigt - aus der Mannigfaltigkeit der "ebenen Lösungen" ein dreidimensionales Geschwindigkeitsfeld mit Hilfe eines Variationsmodells erzeugt wird. Eine Grundforderung für eine solche Transformation verlangt daher in Konsistenz mit den bisherigen Aussagen, daß der axiale Impulsstrom konstant ist, und damit bei der Integration über die axialen Kontrollflächen keinen Nettobeitrag liefert.

Die linke Seite der Vektorgleichung 4.7 verschwindet also in Verbindung mit den bisher herausgearbeiteten Forderungen und die zeitliche Impulsänderung $d\vec{I}/dt$ des Fluids kann durch die vektorielle Summe aller Reaktionskräfte $\vec{R}$ beschrieben werden, die sich aus Volumen- und Oberflächenkräften zusammensetzt.

Unterliegt der betrachtete Kontrollraum nur dem Einfluß des Erdschwerefeldes, dann ist der volumenbezogene Beitrag mit

$$\vec{K} = \int_K \vec{k} \, dV \quad ; \quad \vec{k} = \rho \, \vec{g} \quad (4.14)$$

$$\vec{g} = \{0, 0, -g\}$$

leicht zu beschreiben, wenn $\vec{g}$ den Vektor der Erdbeschleunigung (ca. $9.81 \, \text{m/s}^2$) darstellt. Bei ebenen Strömungsproblemen kann demzufolge die Volumenkraft $\vec{K} \approx 0$ gesetzt werden. Somit verbleiben nur noch die Oberflächenkräfte, die eine zeitliche Impulsänderung $d\vec{I}/dt$ im Fluid bewirken können. Die gesamten durch Zähigkeit und Turbulenz verursachten Reibungsspannungen werden durch einen Spannungstensor $\underline{\underline{\sigma}}$ beschrieben, der sich aus einem laminären und turbulenten Anteil zusammensetzt: / 30 /

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij} p + \eta \left(\frac{\partial w_j}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right) - \rho \overline{w_i' w_j'} \quad \begin{array}{l} \delta_{ij} = 1 \text{ für } i = j \\ \delta_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j \end{array} \quad (4.15)$$

$$\rho, \eta = \text{const}$$

Dabei besteht $\underline{\underline{\sigma}}$ grundsätzlich aus Normal ($i=j$) - und Tangentialspannungen ($i \neq j$), die am Flächenelement $d\vec{A}$ des freien (F) oder festen Teils (0) der Kontrollfläche angreifen. Für die ebene Strömung ($i, j=1, 2$) ergibt sich wegen $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = \tau$ für die einzelnen Größen:

$$\sigma_{xx} = -p + 2 \eta \frac{\partial u}{\partial x} - \rho \overline{u'^2} \quad (4.16)$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2 \eta \frac{\partial v}{\partial y} - \rho \overline{v'^2} \quad (4.17)$$

$$\tau = \eta \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \rho \overline{u' v'} \quad (4.18)$$

An dieser Stelle wird die Begründung für die hier vorgenommene Unterteilung in zwei ineinander asymptotisch übergehende Strömungsgebiete offensichtlich.

Die Schubspannungsverteilung τ an der Strukturoberfläche wird durch die Grenzschichtrechnung (laminar / turbulent) erfaßt, weil die dominanten Terme ($\partial u / \partial y$) sowie das Produkt der turbulenten Schwankungsbewegung ($u'v'$) in unmittelbarer Nähe der Körperoberfläche überwiegen. In der freien Strömung, also außerhalb der Grenzschicht, sind Reibungs- und Turbulenzeinflüsse sehr gering und dürfen gegenüber den Druckeinflüssen vernachlässigt werden (GERSTEN / 12 /, TRUCKENBRODT / 30 /). Diese Aussage gilt insbesondere bei dem hier diskutierten Problem einer Stabgitterströmung, da die resultierenden azimutalen Druckverteilungen an den Einzelkonturen - infolge der durch die hemmende Reibungskraft geleisteten Dissipationsarbeit in der Grenzschicht - den überwiegenden Teil zum Impulsverlust beitragen. Konsequenterweise wird daher die "Außenströmung" reibungsfrei behandelt und die Viskosität η gleich Null gesetzt. Damit entfallen gleichzeitig die Scherbeiträge zwischen den einzelnen Flüssigkeitsteilchen, so daß - neben dem Vorteil einer überhaupt lösbaren Mathematik - den dominanten physikalischen Effekten voll Rechnung getragen wird.

In Analogie zur bisherigen Vorgehensweise müssen jetzt die entsprechenden Integrale über Fluid- und Strukturoberfläche wieder ausgewertet werden. Mit der obigen Begründung reduziert sich g für die Fluidflächen nur zu Druckspannungen, die als skalare Größen normal zum Flächenelement $d\vec{A}$ wirksame Kräfte hervorrufen. Die Oberflächenkraft ist also $d\vec{P} = - p d\vec{A}$, wobei ihre Richtung mit der negativen Richtung der Flächennormalen (positiv nach außen) zusammenfällt :

$$\vec{P} = - \int_F p \vec{n} dA \quad (4.19)$$

Die von der Struktur auf das Fluid wirkende Stützkraft $\vec{S}$ beinhaltet - wie ausgeführt - Druck- und Schubkräfte. Integriert man wieder über alle Strukturoberflächen O , dann wird

$$\vec{S} = \int_O \sigma_{ij} \vec{n}_j dA = \int_O \{ - p \vec{n} + \tau \vec{t} \} dA \quad (4.20)$$

Nach dem Wechselwirkungsgesetz ist somit $(-S)$ diejenige Kraft, die von der Strömung auf die Struktur ausgeübt wird (Widerstandskraft). Das gesamte Integral definiert offensichtlich den "Formwiderstand", der sich additiv aus einem Druck- und einem Reibungsanteil zusammensetzt. Der erste Term wird von der Druckverteilung und damit hauptsächlich von der Geometrie des umströmten Körpers bestimmt, während in den Reibungsanteil im allgemeinen Strömungsparameter wie Re , ν , Tu sowie mechanische Größen wie die Güte der Oberflächenbeschaffenheit (K_s/d) einfließen.

Damit sind alle Beiträge der Ausgangsgleichung 4.7 ausführlich diskutiert und quantifiziert. Zusammenfassend erhält man aus Gl. 4.7, 4.19 und Gl. 4.20 für das verbleibende Kräftegleichgewicht im Kontrollraum :

$$\int_F p \vec{n} dA = \int_O \{ - p \vec{n} + \tau \vec{t} \} dA \quad (4.21)$$

Für den ersten Term im Oberflächenintegral von Gl. 4.21, also dem Beitrag des Drucks auf die Strukturoberfläche O

$$\int_O - p \vec{n} dA = \int_O \sigma_{ii} \vec{n}_i dA \quad (4.21 a)$$

wird im weiteren die Bezeichnung "Druckwiderstand" eingeführt, während das zweite Integral

$$\int_O \tau \vec{t} dA = \int_O \sigma_{ij} \vec{n}_j dA \quad (4.21 b)$$

den "Reibungswiderstand" definiert.

4.2 Mathematische Auswertung der Oberflächenintegrale $\int_0 \sigma_{ij} \vec{n}_j dA$ im Kontrollraum für beliebige Anströmwinkel θ

Mit dem gedanklichen Hilfsmittel der im vorherigen Abschnitt eingeführten integralen Bezugsgeschwindigkeit $\vec{u}$ und den daraus entwickelten Konsequenzen ist ein Weiterkommen für eine quantitative Vorauswertung des Problems gewährleistet. Eine Formulierung der mathematischen Vorgehensweise darf jedoch nicht darüber hinwegtäuschen, daß die reale dreidimensionale Geschwindigkeitsverteilung im schrägangeströmten Stabgitter und das damit gekoppelte Druckfeld noch nicht bekannt sind ! Das bedeutet, daß der im folgenden abgeleitete mathematische Formalismus zwar seine Gültigkeit beibehält, die quantitativen Daten aber nur als "Zwischenergebnisse" verstanden und ausgewertet werden dürfen. Letztendlich verknüpft man in diesem Stadium der theoretischen Analyse also nicht die physikalischen Größen Ursache und Wirkung miteinander, sondern beschreibt das jeweilige Widerstandsverhalten einer umströmten Struktur durch eine von außen aufgezogene Strömungsführung (Testkanal = Kontrollraum). Im Experiment korreliert man das aufgenommene Druckfeld mit einer leicht reproduzierbaren Bezugsgröße (z.B. $\vec{u}$) und erhält auf diese Weise empirische Korrelationen. Der damit in Kauf genommene Informationsverlust, nämlich die Kenntnis des sich ausbildenden Strömungsfeldes, ist für die Praxis in der Regel von untergeordneter Bedeutung. Allerdings müssen dann die Bemühungen, eine physikalische Interpretation zu finden oder gar spezifische Versuchsergebnisse auf andere geometrische Verhältnisse zu extrapolieren, aus diesem Grund zumindest als äußerst "bedenklich" gewertet werden, da die empirisch aufgestellten Korrelationen nur für die jeweils gemessene Anordnung gültig sind.

Unter diesen klärenden Voraussetzungen kann nun die Auswertung des in Gl. 4.21 beschriebenen Oberflächenintegrals erfolgen. Entsprechend der linken Skizze in Bild 4.2 dreht man das raumfeste Kontrollvolumen um einen Punkt, so daß alle interessierenden Winkelbereiche sukzessive abgetastet werden. Da das ortsfeste Stabgitter und die Geometrie des Kontrollraumes (= Versuchskanal) auf diese Weise unverändert beibehalten wird, bleibt auch das Verhältnis zwischen Fluid- und Strukturvolumen konstant.

Mit der Variation des Anström winkels θ ändern sich lediglich die Anzahl und die Längen h^* der Stäbe kontinuierlich. Für die eindeutige Beschreibung über die zu integrierenden Struktur oberflächen werden die folgenden geometrischen Daten definiert:

Länge des Kontrollraumes : l_k
 Breite des Kontrollraumes : b_k
 Höhe des Kontrollraumes : h_k

Mittenabstand der Stäbe quer zur Anströmebene : s_1
 Mittenabstand der Stäbe in Strömungsrichtung : s_2

Stabdurchmesser : D
 Querteilungsverhältnis : $a = s_1 / D$
 Längsteilungsverhältnis : $b = s_2 / D$

Anzahl der Stäbe in Strömungsrichtung : $z = l_k / s_2$ ($\theta = 90^\circ$)
 Anzahl der Stäbe quer zur Anströmebene : $m = b_k / s_1$

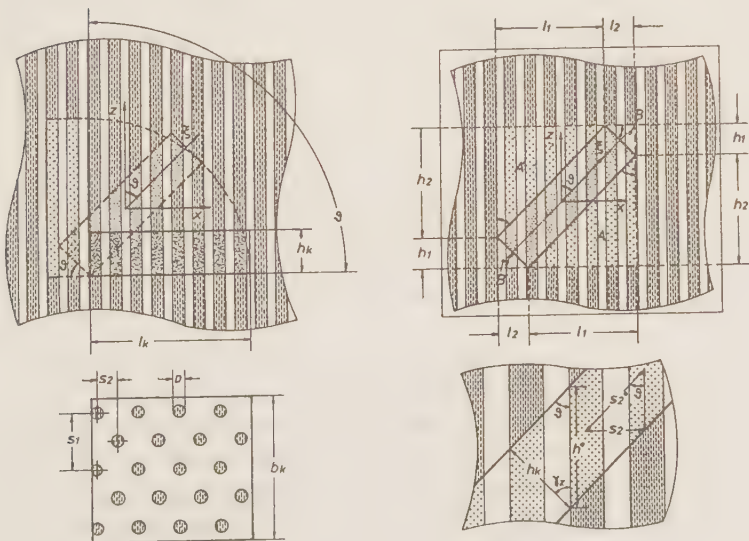


Bild 4.2

Geometrieverhältnisse bei Drehung des Kontrollraumes K zur Auswertung des Oberflächenintegrals über die Struktur oberfläche O

$$\int_O \sigma_{ij} \vec{n}_j dA$$

Im nächsten Schritt wird über die gesamte Strukturoberfläche im Kontrollraum integriert. Mit den winkelabhängigen Hilfsvariablen $h_i, l_i, i = 1, 2$ entsprechend der rechten Skizze von Bild 4.2 :

$$\begin{aligned} l_1 &= l_k \sin \theta & ; & & l_2 &= h_k \cos \theta \\ h_1 &= h_k \sin \theta & ; & & h_2 &= l_k \cos \theta \end{aligned}$$

läßt sich das Oberflächenintegral von Gl. 4.21 auf ein Wegintegral zurückführen, wenn für das Oberflächenelement dA die Integrationsvariablen :

$$dA = ds \, dz \, \sin \theta = ds \, dh \, \cos \gamma_z$$

eingesetzt werden.

$$\begin{aligned} \int_0 \sigma_{ij} \vec{n}_j \, dA &= m \left(\left(\frac{l_1}{s_2} + \frac{l_2}{s_2} \right) \cdot (h_1 + h_2) \int_L \sigma_{ij} \vec{n}_j \cos \gamma_z \, ds \right. \\ &\quad \left. - \frac{l_2}{s_2} \int_L \sigma_{ij} \vec{n}_j \cos \gamma_z \, ds \cdot h_1 \quad (\text{Oberflächenbeitrag "B"}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{l_1}{s_2} \int_L \sigma_{ij} \vec{n}_j \cos \gamma_z \, ds \cdot h_2 \right) \quad (\text{Oberflächenbeitrag "A"}) \\ &= \frac{m \, l_k \, h_k}{s_2} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \int_L \sigma_{ij} \vec{n}_j \cos \gamma_z \, ds \\ \int_0 \sigma_{ij} \vec{n}_j \, dA &= m \, z \, h_k \int_L \sigma_{ij} \vec{n}_j \cos \gamma_z \, ds \quad (4.22) \end{aligned}$$

Der Faktor $\cos \gamma_z = \sin \theta$ berücksichtigt die Abweichung der Flächennormalen der Integrationsebene um die Einzelkontur L_j von der Richtung der z-Achse. Setzt man $\sigma_{ij} = 1$ und integriert in der Ebene normal zur z-Achse ($\cos \gamma_z = 1$), also azimuthal über den Stabumfang, ergibt sich für jeden Winkel θ für die gesamte Staboberfläche bzw. dem Stabvolumen:

$$O = m \, z \, h_k \, \pi \, D = \text{const}$$

$$V_s = m \, z \, h_k \, \pi \, D^2/4 = \text{const}$$

Offensichtlich gilt die Vorschrift von Gl. 4.22 für beliebige Integrationsrichtungen und es genügt, - anstelle der Auswertung des komplizierten Oberflächenintegrals - entlang der Kontur eines repräsentativen Stabes zu integrieren.

Da man zunächst in der durch $\vec{u}$ definierten Anströmebene rechnet (vgl. Bild 3.1) und die Daten für σ entlang der entsprechenden Schnittprofile vorliegen, ist die Integrationsebene damit ohnehin festgelegt. Die Wegintegrale führen dann zu unvollständigen elliptischen Normintegralen zweiter Gattung, die in der Legendre'schen Form mit der Abkürzung:

$$E(\kappa, \phi) = \int_0^{\phi} \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \psi} \, d\psi \quad (4.23)$$

in entsprechenden Tabellenwerken (JAHNKE - EMDE - LÖSCH / 10 /) vertafelt sind. Die Stammfunktion dieser Linienintegrale sind nicht mehr analytisch darstellbar; der Modul κ beschreibt die numerische Exzentrizität der elliptischen Schnittprofile und ist mit

$$\kappa = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - b^2 / a^2} = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \cos \theta \quad (4.24)$$

$$\kappa = \cos \theta ; \quad \begin{array}{l} 1 \leq \kappa \leq 0 \\ 0 \leq \theta \leq 90^\circ \end{array}$$

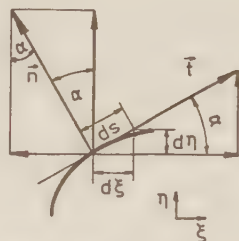
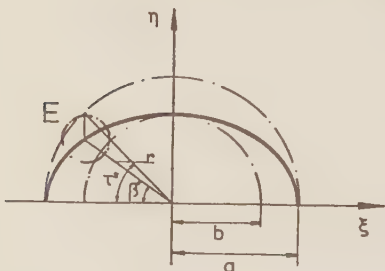
für jeden Anströmwinkel θ eindeutig festgelegt.

Für die weitere Aufarbeitung in eine in der Literatur üblichen Darstellung benötigt man einige Substitutionen, die unmittelbar aus Bild 4.3 zu entnehmen und darunter zusammengestellt sind. Der Übersichtlichkeit wegen wird zunächst das Integral in Gl. 4.22 in seinen Druck- und Reibungsanteil aufgesplittet und daraus die jeweils angreifenden Kräfte in Strömungsrichtung $\xi (\vec{e}_u = \vec{e}_\xi)$ berechnet.

Bild 4.3

Geometrische Zusammenhänge für die Auswertung des

Wegintegrals $\int_L \sigma_{ij} \vec{n}_j \cos \gamma_z ds$



Einzelheit E

$$a = D/(2 \sin \theta) = b/\sin \theta \quad ;$$

$$b = D/2 = \text{const}$$

$$\vec{n} = -\sin \alpha \vec{e}_\xi + \cos \alpha \vec{e}_\eta \quad ;$$

$$\vec{t} = \cos \alpha \vec{e}_\xi + \sin \alpha \vec{e}_\eta$$

$$\xi = -a \cos \tau' \quad ;$$

$$d\xi = a \sin \tau' d\tau' = ds \cos \alpha$$

$$\eta = b \sin \tau' \quad ;$$

$$d\eta = b \cos \tau' d\tau' = ds \sin \alpha$$

$$r(\beta') = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \quad ;$$

Substitution :

$$\tan \beta' = \frac{b}{a} \tan \tau' \quad ;$$

$$\tau' = \pi - \tau \quad , \quad \beta' = \pi - \beta$$

$$\cos \beta' = \frac{a \cos \tau'}{r(\beta')} \quad ; \quad \cos \tau' d\tau' = \frac{r^3(\beta')}{b a^2} \cos \beta' d\beta'$$

$$\sin \beta' = \frac{b \sin \tau'}{r(\beta')} \quad ; \quad \sin \tau' d\tau' = \frac{r^3(\beta')}{a b^2} \sin \beta' d\beta'$$

Für den Druckwiderstand D_ξ in Strömungsrichtung $\vec{e}_u = \vec{e}_\xi$ ergibt sich aus Gl. 4.21 a) bzw. 4.22 für einen repräsentativen Stab :

($\cos \gamma_z = \sin \theta$; vgl. Bild 4.2)

$$\vec{D}_\xi = h_k \int_L \sigma_{11} \vec{n}_1 \cos \gamma_z ds \quad (4.25)$$

$$\vec{D}_\xi = D_\xi \vec{e}_\xi = h_k \int_L -p(s) \vec{n} \cos \gamma_z ds = h_k \sin \theta \int_L p \sin \alpha ds \vec{e}_\xi \quad (4.26)$$

$$D_\xi = h_k \sin \theta \int_0^{2\pi} p(\tau') b \cos \tau' d\tau' \quad (4.27)$$

$$D_\xi = h_k \sin \theta \int_0^{2\pi} p(\beta') \frac{r^3(\beta')}{a^2} \cos \beta' d\beta' \quad (4.28)$$

Die Umfangsdruckverteilung $p(\beta')$ kann durch eine dimensionslose Ersatzgröße $c_p(\beta')$ ersetzt werden. Üblicherweise normiert man den Druckbeiwert $c_p(\beta')$ auf den Wert 1 im Staupunkt ($p = p_0$), so daß die von ACHENBACH / 42 / vorgeschlagene Definition für Stabbündel :

$$c_p(\beta') = 1 - \frac{\{p_0 - p(\beta')\}}{\rho/2 |w_{\text{Bez}}^2|} \quad (4.29)$$

hier eingesetzt werden kann. Als Bezugsgeschwindigkeit w_{Bez} bietet sich zunächst die theoretische Maximalgeschwindigkeit $\bar{w}_{\text{max}}$ im engsten Querschnitt der jeweils untersuchten Anordnung an, um einen direkten Vergleich mit experimentellen Arbeiten vorliegen zu haben. Mit der Definition 4.29 substituiert man nun den Druck $p(\beta')$ durch den Ausdruck :

$$p(\beta') = \rho/2 \bar{w}_{\text{max}}^2 c_p(\beta') - \rho/2 \bar{w}_{\text{max}}^2 + p_0 \quad (4.30)$$

Die additiven, konstanten Terme liefern keinen Beitrag bei der Integration, da der Integrand ($\text{const} \cdot r^3(\beta') \cdot \cos \beta'$) eine symmetrische Funktion bezüglich π ist.

Für die Druckverteilung entlang der Kontur eines repräsentativen Stabes einer unendlichen Anordnung kann eine weitere Symmetrieeigenschaft angesetzt werden, wenn der gerechnete Gitterverband in seiner Grundstruktur symmetrisch zur ξ -Achse (Anströmrichtung) angeordnet ist.

Man erhält dann durch Einsetzen von 4.30 in 4.28 :

$$D_\xi = \rho/2 \bar{w}_{\text{max}}^2 2 h_k \sin \theta \int_0^\pi c_p(\beta') \frac{r^3(\beta')}{a^2} \cos \beta' d\beta' \quad (4.31)$$

Die Gleichung 4.31 vereinfacht sich weiter durch die Definition einer konstanten Bezugsfläche (Stirnfläche) :

$$A_{\text{Bez}} = 2 h_k b = h_k D = \text{const} \quad (4.32)$$

und erhält schließlich wegen $\sin \theta = b/a$ den Ausdruck :

$$D_{\xi} = c_D(\theta) \cdot A_{\text{Bez}} \cdot \rho/2 \cdot \bar{w}_{\text{max}}^2 \quad (4.33)$$

$$c_D(\theta) = \int_0^{\pi} c_P(\beta') \frac{r^3(\beta')}{a^3} \cos \beta' d\beta' \quad (4.34)$$

Die Auswertung für den Reibungsterm $\vec{R}_{\xi}$ erfolgt analog. Nach Gl. 4.21 bzw. 4.22 ergibt sich in Strömungsrichtung $\vec{e}_{\xi}$ für die betrachtete Einzelkontur :

$$\vec{R}_{\xi} = R_{\xi} \vec{e}_{\xi} = h_k \int_L \tau(s) \vec{t} \cos \gamma_z ds \quad (4.35)$$

$$= h_k \sin \theta \int_L \tau(s) \cos \alpha ds \vec{e}_{\xi} \quad (4.36)$$

$$R_{\xi} = h_k \int_0^{2\pi} \tau(\tau') \frac{D}{2} \sin \tau' d\tau' \quad (4.37)$$

$$= h_k D \int_0^{\pi} \tau(\beta') \frac{r^3(\beta')}{a b^2} \sin \beta' d\beta' \quad (4.38)$$

$$= \rho/2 \bar{w}_{\text{max}}^2 A_{\text{Bez}} \int_0^{\pi} \frac{\tau(\beta')}{\rho/2 \bar{w}_{\text{max}}^2} \frac{r^3(\beta')}{a b^2} \sin \beta' d\beta' \quad (4.39)$$

$$R_{\xi} = c_f(\theta) A_{\text{Bez}} \rho/2 \bar{w}_{\text{max}}^2 \quad (4.40)$$

$$c_f(\theta) = 2 \cdot \int_0^{\pi} \frac{\tau(\beta')}{\rho \bar{w}_{\text{max}}^2} \frac{r^3(\beta')}{a b^2} \sin \beta' d\beta' \quad (4.41)$$

Da für den Druck- und Reibungswiderstand dieselben winkelunabhängigen Bezugsgrößen (A_{Bez} , $\bar{w}_{\text{max}}$) eingeführt wurden, lassen sich die dimensionslosen Beiwerte $c_D(\theta)$ und $c_f(\theta)$ additiv zusammenfassen. Der damit definierte Gesamtwiderstandsbeiwert $c_w(\theta)$:

$$c_w(\theta) = c_D(\theta) + c_f(\theta) \quad (4.42)$$

beschreibt dann das Widerstandsverhalten aufgrund der jeweils Winkel- und Reynolds-abhängigen Druck- und Reibungsbeiträgen. Die Widerstandskraft $\vec{P}_\xi^E$ in Strömungsrichtung $\vec{e}_\xi$, die die umströmte Einzelkontur im Stabbündel erfährt, ist somit bei bekanntem c_w -Wert durch

$$\vec{P}_\xi^E = c_w(\theta) \rho / 2 \bar{w}_{\text{max}}^2 A_{\text{Bez}} \vec{e}_\xi \quad (4.43)$$

gegeben.

Als Beispiel wurde die von HOLLENHORST / 5 / durchgemessene Dreiecks-Geometrie nachgerechnet, um später einen direkten Vergleich zwischen den theoretischen und experimentellen Ergebnissen zu erhalten. Einzelheiten der Rechnung - wie Druck- und Schubspannungsverteilung am Zentralstab - sind in den nachfolgenden Bildern 4.4 a) und 4.4 d) für die im Versuch gefahrenen Re-Zahlen von $5 \cdot 10^4 - 1.25 \cdot 10^5$ zusammengefaßt. Die jeweils mitangegebenen Zahlenwerte für die dimensionslosen Druck- und Reibungsbeiwerte $c_D(\theta, \text{Re})$, $c_f(\theta, \text{Re})$ und $c_w(\theta, \text{Re})$ wurden nach den Integralausdrücken von Gl. 4.34, 4.41 sowie Gl. 4.42 ausgewertet und sind zur Veranschaulichung in den Bildern 4.5 - 4.7 aufgetragen.

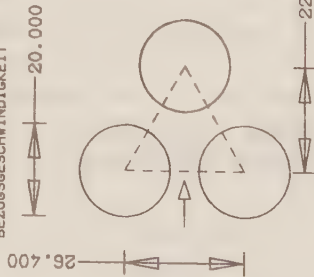
AUSWERTUNG FUER ZENTRALSTAB RE =50000.

GEOMETRISCHE GITTERKENNGROSSEN

VOLUMENPOROSITAET $\gamma = 0.480$ (-)
 QUERTEILUNG $S_1 = 26.400$ (MM)
 LAENGETEILUNG $S_2 = 22.863$ (MM)
 STABDURCHMESSER $D = 20.000$ (MM)
 GITTERKENNZAHL $A \times B = 1.320 \times 1.143$
 $\lambda = S_1/D$
 $B = S_2/D$

STROMUNGSMCHANISCHE BEZUGSGROSSEN

GESCHWINDIGKEIT IM ENGSTEN QUERSCHNITT $W_{MAX} = 4.945$ (M/S)
 MASSENTRANSPORTGESCHWINDIGKEIT $U = 2.500$ (M/S)
 BEZUGSGESCHWINDIGKEIT $U_{BEZ} = 2.371$ (M/S)



SYMBOL	ANSTROMWINKEL (GRAD)	C_0 (-)	C_F (-)	C_y (-)
□	90.0	0.33055	0.00713	0.33788
○	75.0	0.32515	0.00713	0.33228
△	60.0	0.31052	0.00697	0.31749
+	45.0	0.26561	0.00698	0.27258
	30.0	0.18209	0.00648	0.18857
	25.0	0.13712	0.00550	0.14262
	20.0	0.10641	0.00521	0.11182
	15.0	0.07358	0.00455	0.07813
x	10.0	0.04487	0.00387	0.04874
	7.5	0.03104	0.00350	0.03454
	5.0	0.01865	0.00317	0.02182
◇	1.0	0.00792	0.00214	0.01006

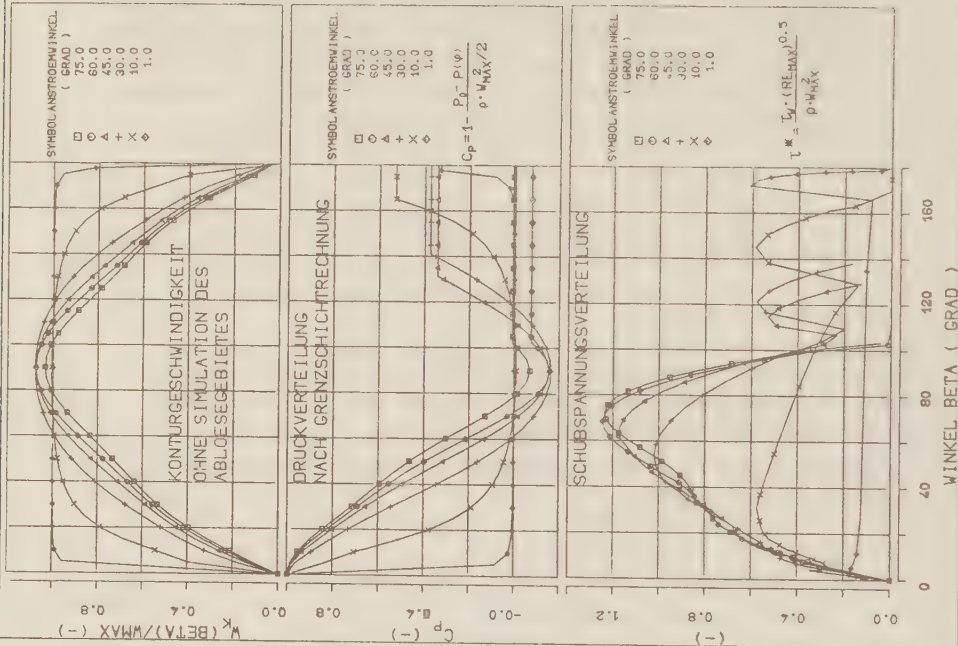


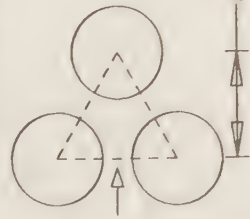
Bild 4.4 a) Zusammenfassende Ergebnisse der ebenen Rechnung $C_D, C_F, C_y = f(\theta, Re)$

GEOMETRISCHE GITTERKENNGROSSEN

VOLUMENFRAKTION $V = 0,480$ (1-1)
 QUERTEILUNG $S_1 = 26,400$ (MM)
 LAENGETEILUNG $S_2 = 22,863$ (MM)
 STABDURCHMESSER $D = 20,000$ (MM)
 GITTERKENNZAHL $A \times B = 1,320 \times 1,143$
 $\lambda = S_1/D$
 $B = S_2/D$

STROMUNGSMECHANISCHE BEZUGSGROSSEN

GESCHWINDIGKEIT IM ENGSTEN QUERSCHNITT $W_{MAX} = 7,417$ (M/S)
 KLASSENTRANSPORTGESCHWINDIGKEIT $U = 3,750$ (M/S)
 BEZUGSGESCHWINDIGKEIT $U_{BEZ} = 3,557$ (M/S)



SYMBOL	ANSTROMENWINKEL (GRAD)	C_D (-)	C_F (-)	C_H (-)
□	90.0	0.30725	0.00692	0.31417
□	75.0	0.30728	0.00669	0.31357
△	60.0	0.28238	0.00666	0.28904
△	45.0	0.23187	0.00629	0.23815
+	30.0	0.16282	0.00561	0.16843
	25.0	0.11738	0.00478	0.12216
	20.0	0.09575	0.00451	0.10026
	15.0	0.08599	0.00397	0.08986
x	10.0	0.03983	0.00342	0.04227
	7.5	0.02556	0.00309	0.03265
	5.0	0.01765	0.00283	0.02048
◇	1.0	0.00792	0.00200	0.00992

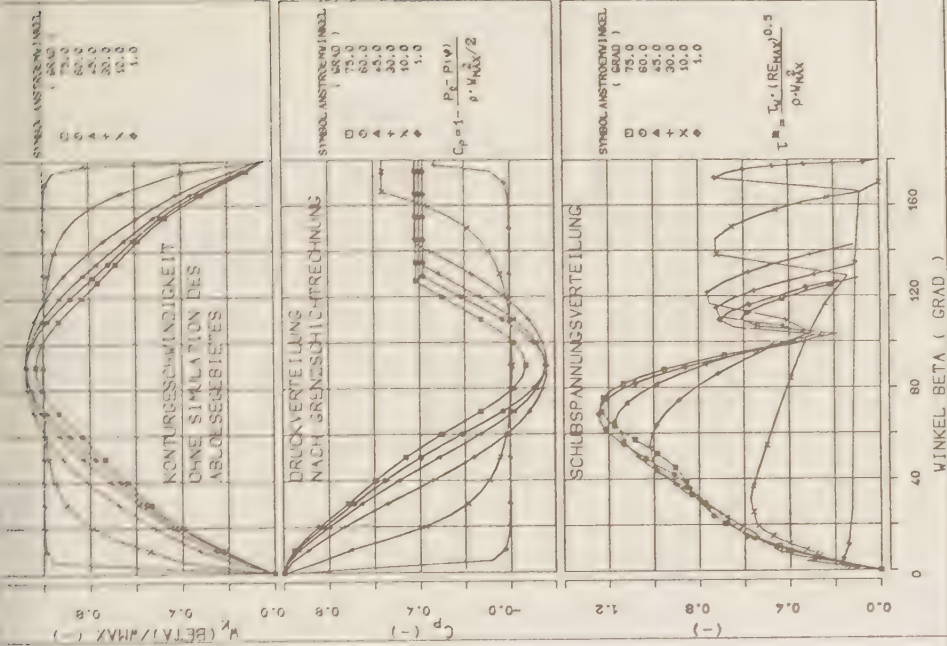


Bild 4.4 b) Zusammenfassende Ergebnisse der ebenen Rechnung C_D , C_F , $C_H = f(\theta, Re)$

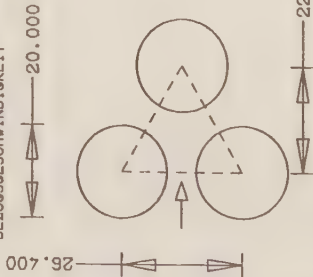
AUSWERTUNG FUER ZENTRALSTAB RE = 100000.

GEOMETRISCHE GITTERKENNGROSSEN

VOLUMENPOROSITAET $\gamma = 0.490$ (-)
 QUERTEILUNG $S_1 = 26.400$ (MM)
 LAENGETEILUNG $S_2 = 22.863$ (MM)
 STABDURCHMESSER $D = 20.000$ (MM)
 GITTERKENNZAHL $A \times B = 1.320 \times 1.143$
 $A = S_1/D$
 $B = S_2/D$

STROMUNGSMCHANISCHE BEZUGSGROSSEN

GESCHWINDIGKEIT IM ENGSTEN QUERSCHNITT $w_{max} = 9.890$ (M/S)
 MASSENTRANSPORTGESCHWINDIGKEIT $U = 5.000$ (M/S)
 BEZUGSGESCHWINDIGKEIT $U_{bez} = 4.742$ (M/S)



SYMBOL	ANSTROMWINKEL (GRAD)	C_D (-)	C_F (-)	C_v (-)
□	90.0	0.27768	0.00618	0.28386
○	75.0	0.27005	0.00605	0.27809
△	60.0	0.25901	0.00604	0.26405
+	45.0	0.22031	0.00569	0.22800
	30.0	0.15452	0.00510	0.15962
	25.0	0.11084	0.00434	0.11518
	20.0	0.08566	0.00402	0.08967
	15.0	0.06217	0.00365	0.06582
x	10.0	0.03734	0.00314	0.04048
	7.5	0.02759	0.00286	0.03045
	5.0	0.01655	0.00263	0.01928
◇	1.0	0.00792	0.00190	0.00981

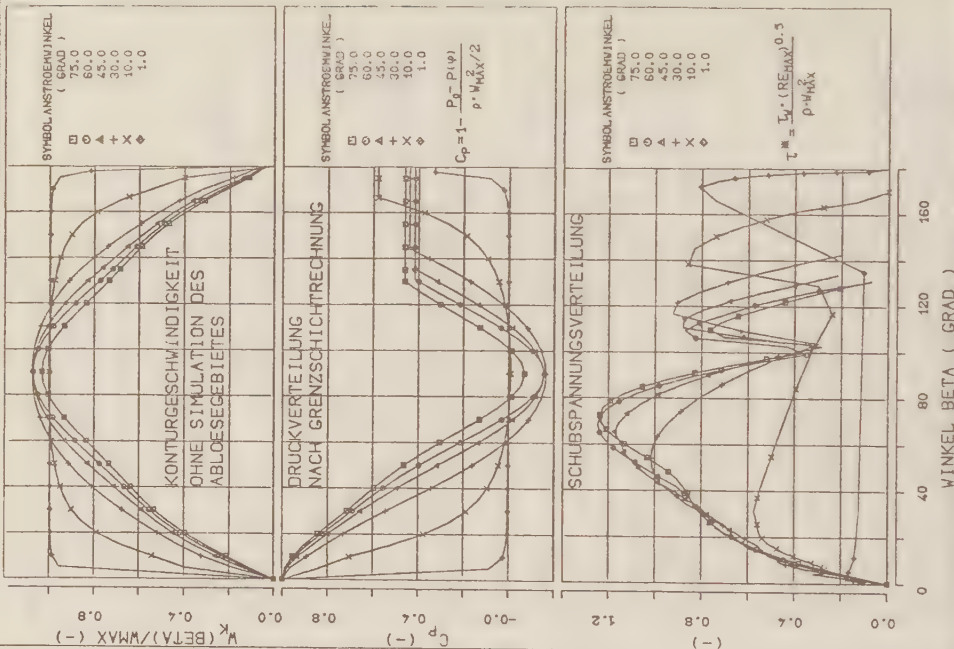


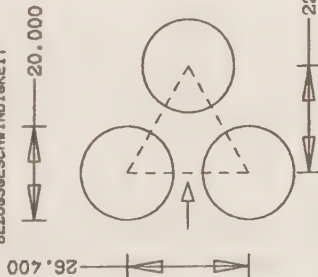
Bild 4.4 c) Zusammenfassende Ergebnisse der ebenen Rechnung

GEOMETRISCHE GITTERKENNGROSSEN

VOLUMENPOROSITÄT $\gamma = 0.480$ (-)
 QUERTEILUNG $S_1 = 26.400$ (MM)
 LAENGSTTEILUNG $S_2 = 22.863$ (MM)
 STABDURCHMESSER $D = 20.000$ (MM)
 GITTERKENNZAHL $\lambda \times B = 1.320 \times 1.143$
 $A = S_1/D$
 $B = S_2/D$

STROMUNGSMCHANISCHE BEZUGSGROSSEN

GESCHWINDIGKEIT IM ENGSTEN QUERSCHNITT $v_{MAX} = 12.362$ (M/S)
 MASSENTRANSPORTGESCHWINDIGKEIT $U = 6.250$ (H/S)
 BEZUGSGESCHWINDIGKEIT $U_{BEZ} = 5.928$ (H/S)



SYMBOL	ANSTROMENWINKEL (GRAD)	C_D (-)	C_F (-)	C_M (-)
□	90.0	0.25294	0.00361	0.25855
○	75.0	0.25847	0.00360	0.26407
△	60.0	0.23504	0.00361	0.24065
+	45.0	0.19892	0.00329	0.20421
	30.0	0.14630	0.00475	0.15105
	25.0	0.10499	0.00405	0.10904
	20.0	0.08084	0.00374	0.08468
	15.0	0.05896	0.00341	0.06177
x	10.0	0.03563	0.00295	0.03978
	7.5	0.02561	0.00270	0.02831
	5.0	0.01645	0.00248	0.01863
◇	1.0	0.00730	0.00185	0.00915

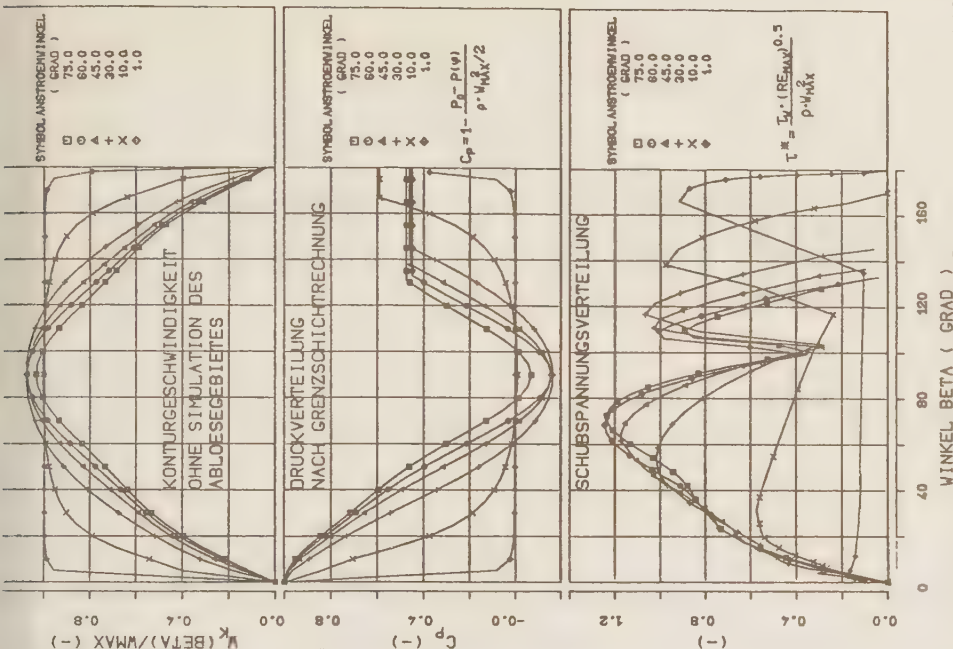


Bild 4.4 d) Zusammenfassende Ergebnisse der ebenen Rechnung C_D , C_F , $C_M = f(\theta, Re)$

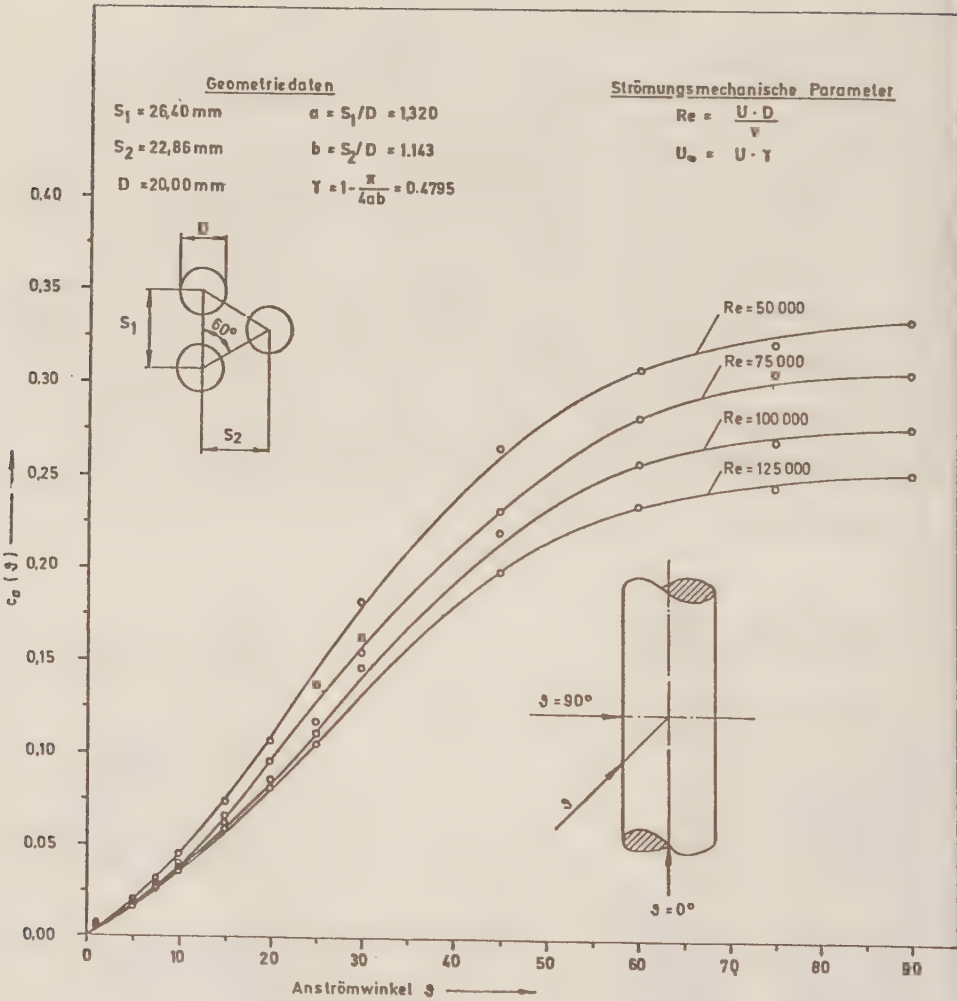


Bild 4.5 Druckwiderstand c_D in Abhängigkeit vom Anströmwinkel θ (ebene Rechnung)

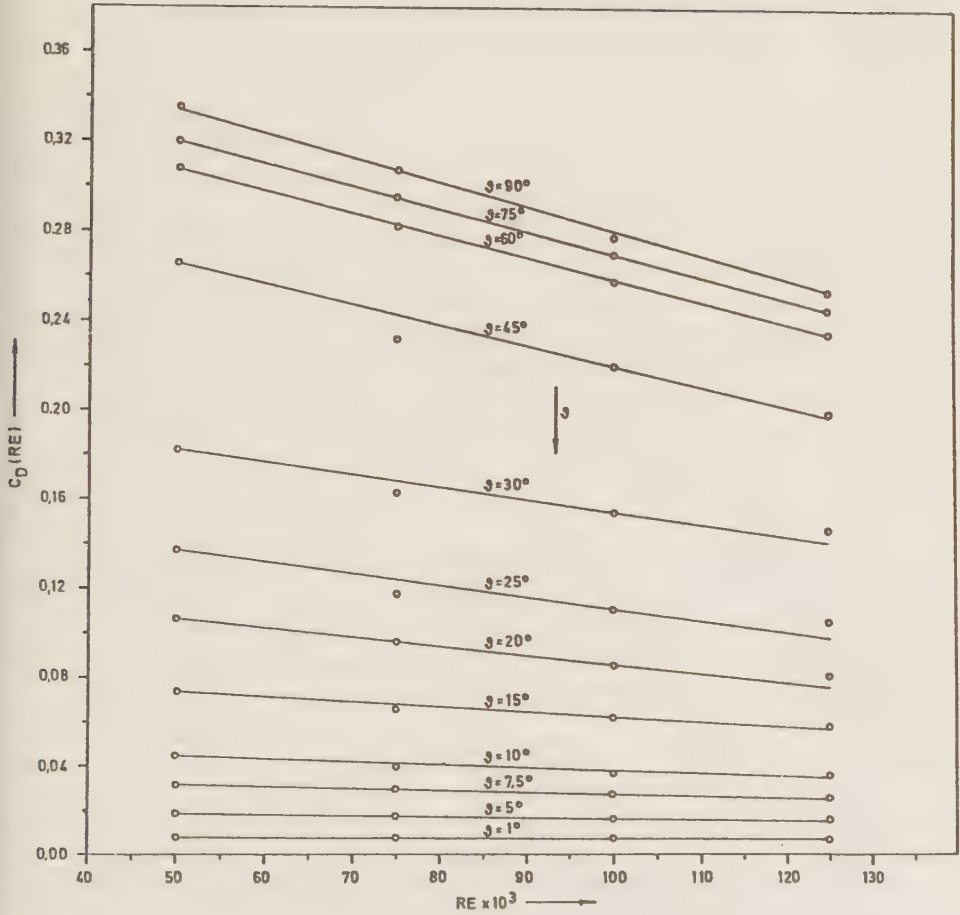


Bild 4.6 Reynoldsabhängigkeit der Druckwiderstandsbeiwerte c_D
(ebene Rechnung)

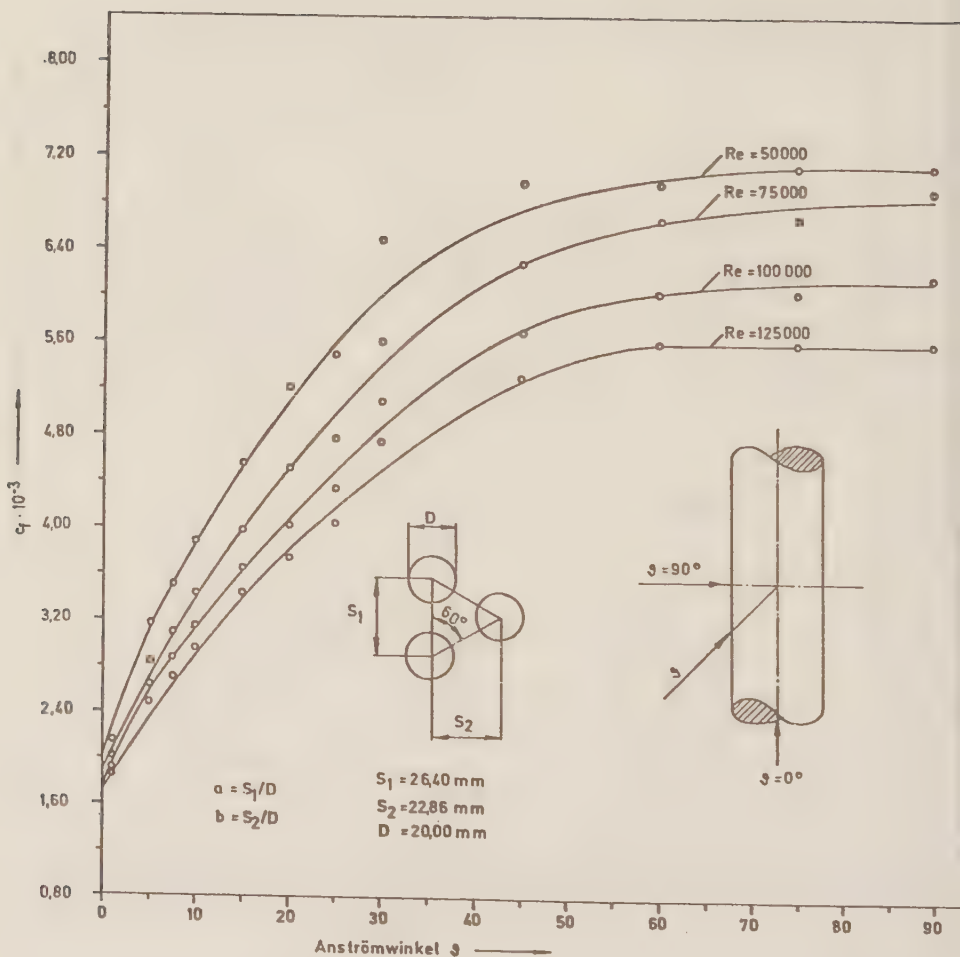


Bild 4.7 Reibungsbeiwerte c_f in Abhängigkeit vom Anströmwinkel θ (ebene Rechnung)

4.3 Zusammenhang zwischen Widerstandsbeiwert $c_w(\theta)$ und Druckverlustbeiwert $\xi(\theta)$ im Stabbündel

Die bisher abgeleiteten Zusammenhänge, die durch die konsequente Auswertung des Impulsintegrals quantifiziert worden sind, beschreiben die Widerstandsbeiwerte $c_D(\theta)$ bzw. $c_F(\theta)$ einer umströmten Einzelstruktur innerhalb einer definierten Anordnung. Als Voraussetzung ist die Kenntnis möglichst aller Einzelheiten (Geschwindigkeits-, Druck- und Schubspannungsverteilungen) um den umströmten Körper notwendig.

Betrachtet man jedoch den Stabverband (Kontrollraum) als Ganzes, also als durchströmte Einheit, so interessieren in der technischen Praxis weniger die komplizierten Vorgänge im Inneren, sondern einfache, die Gesamtwirkung beschreibende integrale Größen, deren übersichtliche Handhabung eine strömungsmechanische Auslegung gewährleisten. Üblicherweise werden deshalb in der Literatur dimensionslose Widerstandsziffern (ξ, λ) eingeführt, die die dissipativen Verluste im Gitterverband berücksichtigen. Überwiegend gelten diese Daten nur für senkrechte bzw. achsenparallele Anströmung; für die wenig erforschte Schräganströmung werden z. B. bei IDEL'CHICK /43/ nur sogenannte Korrekturzahlen angegeben.

Der formale Zusammenhang zwischen den c_w -Werten - resultierend aus der Feinstrukturanalyse - und diesen Widerstandsziffern ξ läßt sich unmittelbar aus der Impulsbilanzierung im Kontrollraum nach Gl. 4.21 und den Bezeichnungen 4.22 sowie 4.43 ableiten. Danach gilt für das Kräftegleichgewicht :

$$\int_F p \vec{n} dA = m z \vec{P}_\xi^E \quad (4.44)$$

wobei das Produkt $(m \cdot z)$ die Gesamtzahl der Stäbe im Kontrollraum und die Größe $\vec{P}_\xi^E$ die Widerstandskraft eines "Zentralstabes" im Gitterverband angibt. Es werden also jedem Stab dieselben Wechselwirkungseigenschaften zwischen Fluid und Struktur zugeordnet. Die Auswertung des Oberflächenintegrals 4.44 über die Fluidfläche F_F ergibt dann mit den in Bild 4.2 definierten Bezeichnungen :

$$\Delta p F_F \vec{e}_\xi = m z p_\xi^E \vec{e}_\xi \quad (4.45)$$

$$F_F = b_k h_k = m s_1 h_k = m s_1 / D h_k \quad D = m a A_{Bez} \quad 0 \leq \theta \leq 90^\circ \quad (4.46)$$

Nach Umstellen dieser Beziehung erhält man mit Gl. 4.43 für den mittleren Druckverlust pro Stabreihe : $(\Delta p|_{1_k/z_{\text{Reihen}}})$

$$\frac{|\Delta p|}{z} = |\Delta p|_{\text{Reihe}} = \frac{m P_{\xi}^E}{m a A_{\text{Bez}}} = \frac{c_w(\theta) \rho/2 \bar{w}_{\text{max}}^2}{a} \quad (4.47)$$

$$|\Delta p|_{\text{Reihe}} = \xi_R^{\text{max}}(\theta) \rho/2 \bar{w}_{\text{max}}^2 \quad (4.48)$$

$$\boxed{\xi_R^{\text{max}}(\theta) = \frac{c_w(\theta)}{a}} \quad (-) \quad (4.49)$$

Die obige Ableitung bestätigt die bekannte Tatsache, daß der Druckverlust im Stabbündel unabhängig von der Anzahl der Stäbe quer zur Anströmrichtung ist.

Für den späteren Übergang von der ebenen Betrachtung zu einer allgemeineren Korrelation zwischen Druck- und Geschwindigkeitsfeld im Bündel, bietet es sich an, den resultierenden Druckabfall im Kontrollraum pro Längeneinheit zu beschreiben. Damit ergibt sich eine dimensionsbehaftete Formulierung für den mittleren Druckverlustbeiwert ξ (1/m), der sehr anschaulich die strömungsmechanischen Parameter $c_w = f(\text{Re}, \text{Ablösewinkel}, \text{Anströmwinkel})$ mit den geometrischen Gitterkenngrößen (Längsteilung a , Querteilung b , Stabdurchmesser D) verknüpft :

$$\frac{\Delta p}{1_k} \vec{e}_{\xi} = \frac{\Delta p}{z s_2} \vec{e}_{\xi} = \frac{\partial p}{\partial \xi} \vec{e}_{\xi} = \frac{c_w(\theta)}{a b D} \rho/2 \bar{w}_{\text{max}}^2 \vec{e}_{\xi} \quad (4.50)$$

$$\xi^{\text{max}}(\theta) = \frac{c_D(\theta) + c_f(\theta)}{a b D} \quad (1/m) \quad (4.51)$$

gerechneten Daten sind in nachstehender Tab. 4.1 aufgeführt sowie in Bild 4.9 graphisch ausgewertet. Sie bilden die Grundlage für das in Kap. 5 erläuterte Variationsmodell, das - in Anlehnung an die im Experiment beobachteten Phänomene - aus der ebenen Rechnung eine verbesserte Näherungslösung für das Druck- und Geschwindigkeitsfeld im schrägdurchströmten Stabbündel erlaubt.

Tab. 4.1 Widerstandsbeiwerte ξ (θ , Re) (ebene Rechnung)

$\xi(\theta, Re) = c_w(\theta, Re) \frac{1}{a b D} \left(\gamma \frac{a}{a-1} \right)^2$ **)					
$\theta^\circ \backslash Re$	50.000	75.000	100.000	125.000	
90.0	43.800	40.730	36.800	33.520	Eckwerte *)
89.0	43.777	40.729	36.800	33.518	
75.0	43.076	40.702	35.793	34.234	
60.0	41.159	37.471	34.231	31.198	
45.0	35.338	30.874	29.299	26.474	
30.0	24.446	21.835	20.693	19.582	
25.0	18.489	15.837	14.932	14.135	
20.0	14.471	12.998	11.625	10.978	
15.0	10.129	9.070	8.532	8.008	
10.0	6.319	5.610	5.248	5.027	
7.5	4.478	4.232	3.948	3.670	
5.0	2.829	2.655	2.500	2.416	
1.0	1.305	1.286	1.272	1.186	
0.0	~ 1.15	~ 1.05	~ 0.98	~ 0.95	Eckwerte *)

*) extrapolierte Werte , vgl. Bild 6.1 - 6.2

**) Definitionen zu a, b, γ

sowie Zahlenwerte zu $c_w(\theta, Re)$, vgl. Bilder 4.4 a) - 4.4 d)

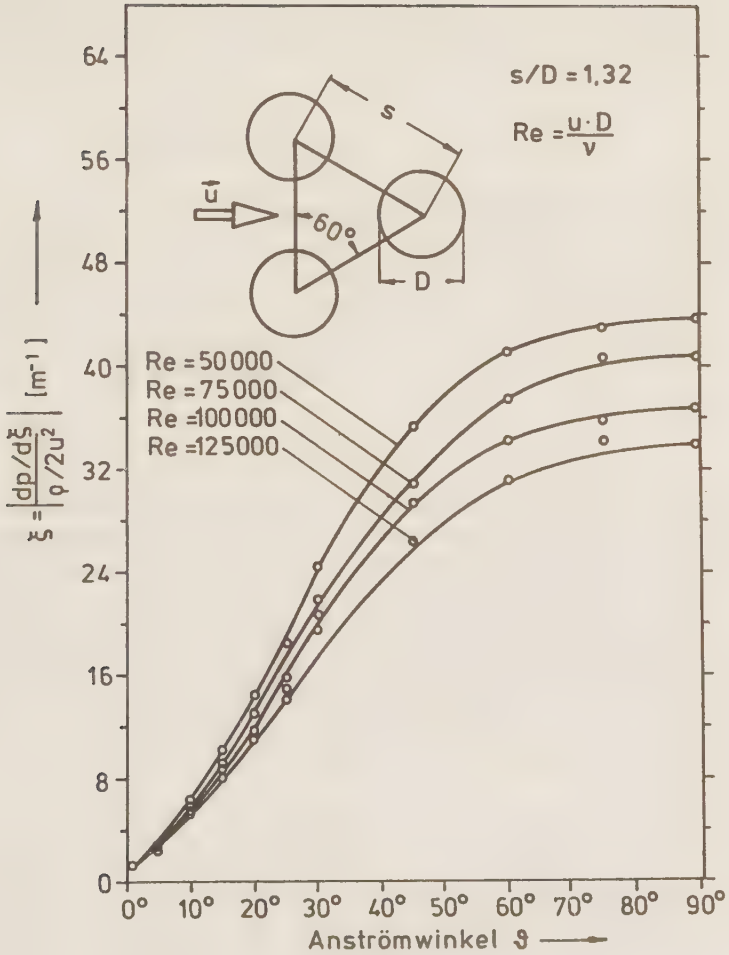


Bild 4.9 Widerstandsbeiwerte $\xi(\beta, Re)$
(ebene Rechnung)

5. Simulation von Druck- und Geschwindigkeitsfeld im schrägangeströmten Stabgitter
- 5.1 Physikalische Interpretation von experimentell gefundenen Phänomenen auf der Basis eines Variationsmodells

Entsprechend der Herleitung liefert die bisher durchgeführte ebene Rechnung einen Wertevorrat von Widerstandsbeiwerten ξ (θ, Re), die den mittleren Druckgradienten $dp/d\xi \vec{e}_\xi$ in Richtung der vorgegebenen integralen Bezugsgeschwindigkeit $\vec{u}$ beschreiben ($\vec{e}_u = \vec{e}_\xi$).

$$\vec{u}_\infty = \gamma \vec{u} \quad ; \quad \gamma = \frac{V_F}{V} = 1 - \frac{\pi}{4ab}$$

$a = s_1/D$ (Querteilungsverhältnis) ; V_F = Fluidvolumen

$b = s_2/D$ (Längsteilungsverhältnis) ; V_S = Strukturvolumen

$$V = V_S + V_F$$

$$\vec{u} = \frac{1}{V_F} \int_{V_F} \vec{w}(x,y,z) dV$$

Eine Vorgabe von $\vec{u}$ bzw. eines zu simulierenden Durchsatzes durch den Kontrollraum (= Testkanal) ist aus Kontinuitätsgründen immer möglich. Allerdings liegt damit noch keine Information über das reale, 3-dimensionale Druck- und Geschwindigkeitsfeld $\vec{w}(x,y,z)$ im Gitterverband selbst vor. Für das physikalische Verständnis der im Experiment beobachteten Phänomene ist deshalb eine tiefergehende Feinstrukturanalyse unabdingbar. Zur Begründung der weiteren Vorgehensweise wird deshalb zunächst kurz der Kenntnisstand aus experimentellen Arbeiten zusammengefaßt :

Druckfeldmessungen, die von BÖTTGENBACH / 6 / in quadratisch angeordneten Stabbündeln durchgeführt wurden, zeigen, daß bei Schräganströmung der gemessene resultierende Druckgradient $\text{grad } p$ von der mittleren Strömungsrichtung $\vec{u}$ abweicht. Zur Quantifizierung der Meßdaten benutzte er eine von ZIEGLER / 1 / vorgeschlagene Formulierung (Gl. 5.1), die über eine Vektor - Vektor - Beziehung den gemessenen Druckgradienten mit der mittleren Massentransportgeschwindigkeit $\vec{u}$ korreliert.

Die ausgeprägten Anisotropie-Eigenschaften des Stabbündels werden dabei durch eine Matrix beschrieben, deren Diagonalelemente sowohl eine funktionale Abhängigkeit vom Anströmwinkel θ als auch von der Re-Zahl aufweisen. Die Messungen zeigen, daß insbesondere die Terme $f_x(\theta)$ sowie $f_z(\theta)$ in der Matrix 5.2 für die richtige Wiedergabe von $\text{grad } p$ maßgebend sind, während die Re-Abhängigkeit eine untergeordnete Rolle spielt.

$$\text{grad } p = - \rho/2 \, |\vec{u}| \, \underline{\zeta} \, \vec{u} \quad (5.1)$$

$$\underline{\zeta} = \begin{pmatrix} C_x f_x(\theta) \text{Re}^{K_x} & 0 \\ 0 & C_z f_z(\theta) \text{Re}^{K_z} \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Die von WINTER / 7 / durchgeführte Auswertung von "High-Speed-Aufnahmen" im Gitterverband ergab, daß sich das Geschwindigkeitsfeld im Stabgitter im wesentlichen aus zwei dominanten Teilströmen zusammensetzt :

Es läßt sich zum einen eine relativ ungestörte, sogenannte "freie Strömung" $\vec{v}'$ zwischen den Stabreihen neben einer vorwiegend im Ablösegebiet auftretenden "Wirbelströmung" $\vec{w}'$ unterscheiden. Auffallend ist dabei die deutliche Abweichung der freien Strömung - in Abhängigkeit vom Anströmwinkel θ - zur Stabnormalen hin, während die beobachtete Wirbel driftströmung im Totwassergebiet sich überwiegend parallel zur Stabachse bewegt. In diesem Zusammenhang kommt einer formal-mathematischen Trennung der Integrationsvorschrift in der Definitionsgleichung für $\vec{u}$ eine tiefere Bedeutung zu. Man erhält unmittelbar aus 4.13

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \frac{1}{V_F} \int_{V_F} \vec{w}(x,y,z) \, dV \\ &= \frac{1}{V_F} \int_{V_{v'}} \vec{w}(x,y,z) \, dV + \frac{1}{V_F} \int_{V_{w'}} \vec{w}(x,y,z) \, dV \\ &\stackrel{!}{=} \lambda \vec{v}' + (1-\lambda) \vec{w}' \quad ; \quad 0 < \lambda \leq 1 \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\vec{u} = \vec{v}(\theta) + \vec{w}(\theta) \quad ; \quad \lambda = \lambda(\theta, \text{Re}) \quad (5.4)$$

eine einfache Vektorbeziehung, die sowohl der Kontinuitätsforderung genügt als auch die im Experiment beobachteten Teilströme präzisiert. Die winkelabhängige, skalare Größe λ ist dann durch die Quotienten :

$$\lambda = \frac{V_{V'}}{V_F} \quad ; \quad V_{V'} = \text{Volumen der freien Strömung } \vec{v}' \quad (5.5)$$

$$\quad ; \quad V_{W'} = \text{Volumen der Wirbel driftströmung } \vec{w}'$$

(Ablösegebiet)

$$1 - \lambda = \frac{V_{W'}}{V_F} \quad ; \quad V_F = V_{V'} + V_{W'} = \text{Fluidvolumen} \quad (5.6)$$

definiert.

Zur berührungsfreien Geschwindigkeitsmessung wurde von FLÜGGE / 4 / ein spezielles Laser-Zwei-Fokus-Verfahren entwickelt, mit dem er die von WINTER beobachteten Effekte quantitativ bestätigen konnte. Die Ergebnisse ergeben interessanterweise eine tendenzielle Übereinstimmung mit der von BÖTTGENBACH gefundenen Widerstandscharakteristik, d.h. die Abweichung, also der Winkel zwischen $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ist im wesentlichen eine Funktion von θ ; während der Einfluß der Re-Zahl eine untergeordnete Rolle spielt.

Es liegt deshalb nahe, die zitierten experimentellen Befunde zu verknüpfen, da Druck und Geschwindigkeit entsprechend den Bewegungsgleichungen gekoppelt sind. Für eine integrale Beschreibung läßt sich also folgern, daß - in Konsistenz mit den Aussagen der Experimente - der gemessene, mittlere Druckgradient $\text{grad } p$, sich vektoriell aus den Beiträgen der beiden (integralen) Teilströme $\vec{v}$ und $\vec{w}$ zusammensetzt.

Der physikalische Gedanke bei dieser Modellvorstellung ist für die weitere mathematische Analyse von grundlegender Bedeutung und soll deshalb an dieser Stelle etwas ausführlicher diskutiert und begründet werden :

Das aufgezeigte, experimentell gefundene Strömungs- und Widerstandsverhalten läßt sich nach einem Fundamentalgesetz der Physik, nämlich dem "Prinzip der kleinsten Wirkung" unmittelbar interpretieren /51/. Danach sucht sich die Strömung den energetisch günstigsten Weg durch das Stabgitter.

Diese pauschale Feststellung ist insofern konsistent mit dem Prinzip der kleinsten Wirkung zu vereinbaren, da dieses Gesetz verlangt, daß in einem System die "Wirkung" - das ist das Produkt der Größen "Energie" mal "Zeit" - ein Minimum wird. Für ein vorgegebenes Zeitintervall Δt ist diese Forderung gleichbedeutend mit der Aussage, daß die gesamte, in einem definierten Zellvolumen verrichtete Arbeit, - d.h. das Volumenintegral über alle Einzelbeiträge - minimal wird. Daraus folgt, daß die resultierenden Kräfte auf das Stabgitter infolge des Impulsaustausches (Fluid - Struktur) minimal werden und damit auch, daß der resultierende Betrag des sich einstellenden Druckgradienten ein Minimum annimmt.

Der formale Nachweis findet sich bei STRSCHELETZKY /55/. Er zeigt, daß das Wirkungsintegral der sich einstellenden Strömung ein Minimum darstellt. Variiert man die Bahnlinien R_n durch virtuelle Verschiebungen $\delta \vec{r}$ im betrachteten Volumenelement dV , so daß jedes Teilchen ein und dieselbe Zeit braucht, um die wirkliche bzw. die variierte Wegstrecke des jeweils betrachteten Stromlinienbildes zu durchlaufen, so gilt :

$$\sum_n \int_{R_n} \text{grad } p dV \delta \vec{r} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \text{grad } p^v + \text{grad } p^w \stackrel{!}{=} \min$$

Das Widerstandsverhalten eines beliebig durchströmten Gitterverbandes kann daher als Funktional der Geometrieverhältnisse, des Anströmwinkels und der jeweils eingehenden Strömungsparameter angesehen werden. Daraus resultiert ein typisches Variationsproblem mit dem Ziel : aus der Mannigfaltigkeit aller Lösungen im jeweiligen Variationsintervall, das Minimum von $|\text{grad } p|$ zu finden.

An dieser Stelle wird nun der Vorteil der einfach zu handhabenden integralen Größen $(\xi, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ offensichtlich. Der gewonnene Wertevorrat $\xi(\theta, Re)$ aus der zuvor durchgeführten ebenen Feinstrukturanalyse kann jetzt zur Modellierung des (integralen) Strömungsverhaltens herangezogen werden. Die prinzipielle weitere Vorgehensweise besteht also darin, alle zulässigen (= physikalisch sinnvollen) Variationswinkel ϵ_v durchzuspielen. In Anlehnung an die zitierten experimentellen Erkenntnisse und die oben begründete Modellvorstellung lassen sich dann physikalisch konsistente Vektoradditionen für den mittleren Druckgradienten und den jeweils damit korrespondierenden integralen Geschwindigkeitsvektor als Ansatz für die Variationsrechnung finden.

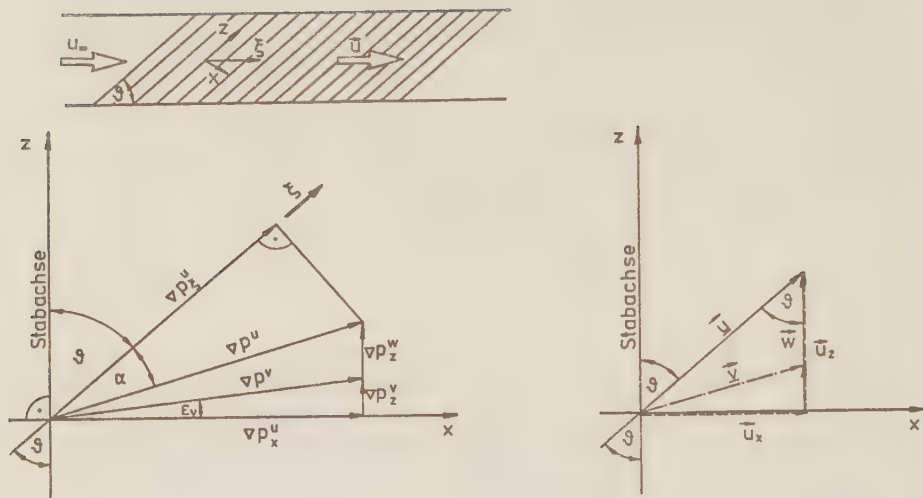


Bild 5.1 Vektorielle Darstellung der Druck- und (integralen) Geschwindigkeitsgrößen im Stabgitter

Nach Bild 5.1 gelten dann folgende Beziehungen : *)

$$\nabla p^u = \nabla p^v + \nabla p^w = \nabla p_x^v + \nabla p_z^v + \nabla p_z^w \quad (5.7)$$

$$\text{radiale Komponente : } \nabla p_x^u = \nabla p_x^v = \nabla p^v \cos \epsilon_v \quad (5.8)$$

$$\text{axiale Komponente : } \nabla p_z^u = \nabla p_z^v + \nabla p_z^w \quad (5.9)$$

$$\text{mit der Forderung : } \nabla p^u = \sqrt{|\nabla p_x^u|^2 + |\nabla p_z^u|^2} \stackrel{!}{=} \min \text{ für } \theta, \quad (5.10)$$

$\text{Re}^u = \text{const}$

*) Bedeutung der im folgenden eingeführten Schreibweise :
 oberer Index bezeichnet die Bezugsgeschwindigkeit
 unterer Index kennzeichnet die Richtung des Vektors

Für die Geschwindigkeiten erhält man die Ausdrücke :

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{w} \quad (5.11)$$

$$\text{radiale Komponente : } u_x = u \sin \theta = v \cos \epsilon_v \quad (5.12)$$

$$\text{axiale Komponente : } u_z = u \cos \theta = v \sin \epsilon_v + w \quad (5.13)$$

In Konsistenz mit Gl. 4.56 setzt man für den Druckabfall infolge $\vec{v}$:

$$\nabla p^v = \frac{\partial p}{\partial \epsilon_v} \vec{e}_v = - \rho/2 \xi(\epsilon_v, Re^v) v^2 \vec{e}_v \quad (5.14)$$

und analog für den axialen Beitrag im Ablösegebiet :

$$\nabla p^w = \frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z = - \rho/2 \xi_w w^2 \vec{e}_z \quad (5.15)$$

Die Geschwindigkeiten v und w lassen sich mit den angegebenen Zusammenhängen substituieren. Mit der Normierungskonstante $\rho/2 u^2$ ergibt sich schließlich nach einigen Umformungen für die radialen bzw. axialen (normierten) Druckgradienten :

$$\zeta_x^u(\theta, Re^u) = \frac{|\nabla p_x^u|}{\rho/2 u^2} = \xi(\epsilon_v, Re^v) \frac{\sin^2 \theta}{\cos \epsilon_v} \quad (1/m) \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \zeta_z^u(\theta, Re^u) = \frac{|\nabla p_z^u|}{\rho/2 u^2} = & \xi(\epsilon_v, Re^v) \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \epsilon_v} \sin \epsilon_v + \\ & + \xi_w (\cos \theta - \sin \theta \tan \epsilon_v)^2 \quad (1/m) \end{aligned} \quad (5.17)$$

Damit sind die Ausgangsgleichungen für den Variationsansatz 5.10 gefunden und es kann der jeweils errechnete (normierte) Druckgradient über dem Variationswinkel ϵ_v aufgetragen werden (vgl. Bild 5.1, 5.2). Läßt sich im Variationsintervall ein Minimum nachweisen, so liegen alle voneinander abhängigen Variablen eindeutig fest und können dem jeweils betrachteten Anströmwinkel θ zugeordnet werden.

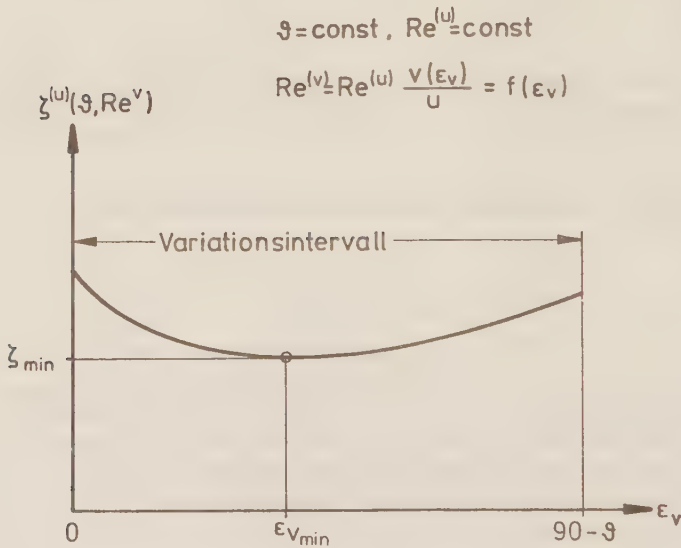


Bild 5.2 Schematische Verdeutlichung der Variationsrechnung
(Entscheidungskriterium zur Bestimmung der mittleren
Richtung der freien Strömung über den Winkel $\epsilon_{v,\min}$)

Die in Gl. 5.15 vorweggenommene Größe $\xi_w(\theta)$ wird aus Gründen der Übersichtlichkeit erst im nächsten Kapitel 5.2 erörtert und soll hier als bekannt vorausgesetzt sein.

Wird also die funktionale Abhängigkeit des Widerstandsverhaltens richtig vorgegeben, so erhält man als Ergebnis die Lage und den Betrag des gesuchten resultierenden Druckgradienten $\text{grad } p$. Da im Ansatz selbst die Kontinuitätsforderung schon verarbeitet ist, liegen auch die Vektoren von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ konsistent dazu fest. Über die Kenntnis des Ablöseverhaltens $\beta_a = f(\theta, \text{Re})$ läßt sich dann die in Gl. 5.5 formal definierte Größe λ bestimmen, so daß letztlich alle gesuchten Informationen bekannt sind und mit den experimentellen Daten verglichen werden können.

Das Grenzwertverhalten des Variationsmodells ist in der nachfolgenden Übersicht zusammengestellt. Man erhält die in Tab. 5.1 angegebenen Daten für die Extremwerte der achsenparallelen ($\theta = 0^\circ$) bzw. senkrechter Anströmung ($\theta = 90^\circ$), sowie für die Eckwerte jedes Variationsintervalls $0^\circ < \epsilon_v < 90^\circ - \theta$, indem man nach Bild 5.1 die Identitäten :

$$\epsilon_v(\theta) = 90^\circ - \theta$$

$$\sin \epsilon_v = \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\cos \epsilon_v = \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

in die gefundenen Beziehungen 5.16 und 5.17 einsetzt.

<u>Tab. 5.1</u> Grenzwertverhalten des Variationsmodells Funktion	Senkrechte Anströmrichtung $\theta = 90^\circ$ $\epsilon_v = 0^\circ$ Grenzwert	Achsenparallele Anströmrichtung $\theta = 0^\circ$ $\epsilon_v = 90^\circ$ Grenzwert
Druckverlustbeiwert $\xi(\epsilon_v)$	ξ_{90}	ξ_0
normierter Druckgradient $\zeta_x^u(\theta)$	ξ_{90}	0
normierter Druckgradient $\zeta_z^u(\theta)$	0	ξ_0
Steigung im Grenzwert:		
$\lim \partial \zeta_x^u / \partial \theta$	0	ξ_0
$\lim \partial \zeta_z^u / \partial \theta$	$-\xi_{90}$	0

5.2 Theoretische Modellierung der Dissipationsvorgänge im Ablösegebiet

Der im Variationsmodell Gl. 5.17 formal eingeführte Widerstandsbeiwert $\xi_w(\theta)$, der die Dissipationsvorgänge im Ablösegebiet beschreiben soll, wird durch das bisher verfolgte Konzept allerdings nicht erfaßt. Dies liegt daran, daß einerseits der Informationsvorrat aus der Grenzschichtrechnung - was letztlich über die Integration der Schubspannungen zu c_f -Werten führte - nur bis zur Ablösestelle vorliegt. Zum anderen - und das ist der weit wichtigere Grund - kann bei ebenen Strömungen mit Ablöseerscheinungen auf die Quantifizierung der Reibungsbeiträge ohnehin meist völlig verzichtet werden, da diese dann in der Regel eine untergeordnete Rolle spielen.

Die von BÜTTGENBACH, WINTER und HOLLENHORST / 6 , 7 , 5 / experimentell ermittelten Daten bestätigen dies auch für das gefundene Widerstandsverhalten im schräg angeströmten Stabgitter, solange man nur die Größenordnungen der einzelnen Beträge in Betracht zieht ($\partial p / \partial x \gg \partial p / \partial z!$).

Der gemessene Verlauf des Druckgradienten in Richtung der Stabachse weist jedoch eine interessante Winkelabhängigkeit auf (Bild 5.3), so daß mit dem einfachen Ansatz :

$$\xi_w = \text{const}$$

dem physikalischen Charakter der Dissipationsvorgänge im Ablösegebiet offenbar nicht Rechnung getragen wird. Insbesondere ist die deutliche Überhöhung im Bereich großer Anströmwinkel ($\theta \approx 75^\circ - 80^\circ$) ein auffallendes Phänomen, für das in den erwähnten Arbeiten noch keine zufriedenstellende physikalische Deutung gefunden werden konnte.

Die zitierten Autoren interpretieren dieses Ergebnis im wesentlichen übereinstimmend mit der Vorstellung, daß sich die Wirbel "schraubenförmig" entlang der Stabachse bewegen.

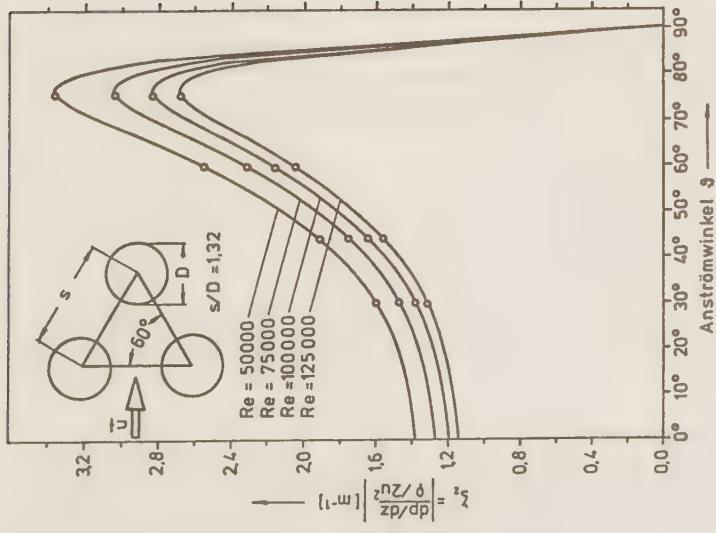


Bild 5.3 a) Druckabfall in axialer Richtung
Experiment — (geglättet)
Messpunkte 30°, 45°, 60°, 75°
Quelle : HOLLENHORST /5/

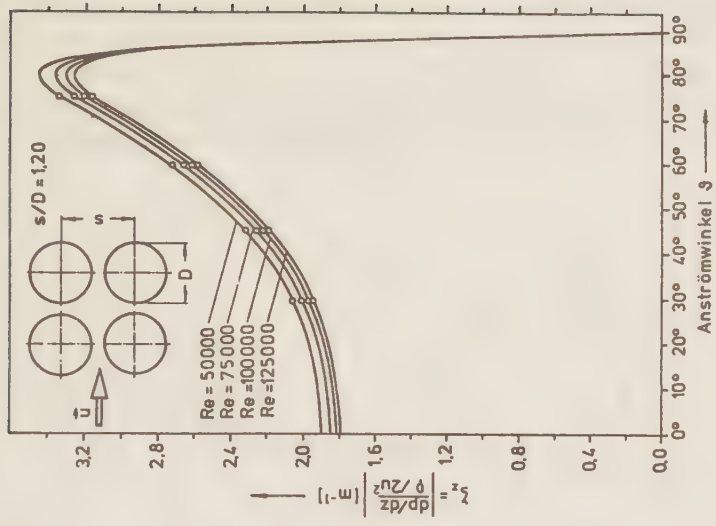


Bild 5.3 b) Druckabfall in axialer Richtung
Experiment — (geglättet)
Messpunkte 30°, 45°, 60°, 75°
Quelle : BÖTTGENBACH /6/

Darüberhinaus wird vermutet : " daß für den "Antrieb" der Wirbel weitere Energie notwendig ist, die von der Außenströmung "nachgeliefert" werden muß, bzw. dieser "entzogen" wird ". Für den überwiegenden Teil des Meßbereiches ($30^\circ \leq \theta \leq 75^\circ$) läßt sich aus der Böttgenbach'schen Darstellung (Gl. 5.1, 5.2) für den normierten axialen Druckabfall (in Richtung $\vec{e}_z$ der Stabachse)

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z &= - \rho/2 u \xi_0 f_z(\theta) \vec{u}_z \\ \text{mit } f_z(\theta) &= \cos^{-2}(0.9 \theta) \\ \text{und } u_z &= u \cos \theta \end{aligned} \quad (5.18)$$

ein ungefähr dem Cosinus des Anströmwinkels umgekehrt proportionales Widerstandsverhalten feststellen.

$$\frac{|\nabla p_z^u|}{\rho/2 u^2} = \zeta_z^u = \frac{\xi_0 \cos \theta}{\cos^2(0.9 \theta)} \approx \xi_0 / \cos \theta \quad (5.19)$$

Außerdem zeigen die Ergebnisse übereinstimmend eine typischerweise schwach ausgeprägte Re-Abhängigkeit. Daraus läßt sich für die theoretische Analyse unmittelbar schließen, daß das aufgezeigte Problem mit dem Ablöseverhalten im Gitterverband gekoppelt sein muß.

Da noch keine theoretische Beschreibung bekannt ist, die die komplizierten Vorgänge im Ablösegebiet zugänglich macht und mit vertretbarem Aufwand lösbar erscheinen läßt, soll im weiteren auf dieser gedanklichen Basis eine mathematisch quantifizierbare Formulierung diskutiert und mit den experimentellen Ergebnissen verglichen werden.

Konsequenterweise wird deshalb an dieser Stelle das Totwasser der Stäbe durch reibungsbehaftete Wirbelpaare ersetzt. Um eine vollständige Kompatibilität mit der bisherigen Vorgehensweise zu erhalten und den physikalisch notwendigen stetigen Übergang von der Außenströmung zum "Wirbelrand" zu gewährleisten, muß die

Umfangsgeschwindigkeit $w_u(R_r)$ des idealisierten Wirbels jeweils gleich der damit korrespondierenden Ablösegeschwindigkeit $w_a(\beta_a)$ sein.

Für eine Abschätzung der dissipativen Verluste genügt die Annahme konstanter Winkelgeschwindigkeit im Wirbelkern.

$$\omega = \text{const} \quad ; \quad \theta, \text{Re} = \text{const}$$

Potential - Wirbel

drehungsbehafteter Wirbel

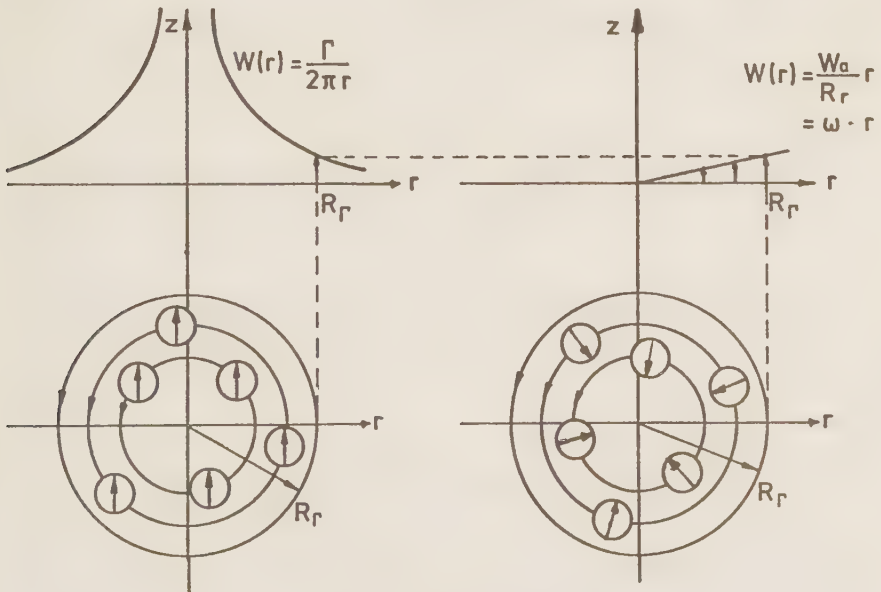


Bild 5.4 Geschwindigkeitsrandbedingung im idealisierten Ablösegebiete

Mit Hilfe dieser Idealisierung des Ablösegebietes läßt sich ein theoretischer Ansatz formulieren, der eine Analogie zwischen der einfachen Rohr- und der hier zu beschreibenden Wirbel driftströmung aufweist.

Ausgehend von den Definitionen für die Rohrreibungszahl λ_R und dem hydraulischen Durchmesser d_h

$$\lambda_R = \frac{8\tau}{\rho \bar{w}_R^2} = \text{const} \quad ; \quad \tau = \text{const} \quad (5.20)$$

$$d_h = \frac{4A}{U} \quad (5.21)$$

ergibt sich die bekannte Formel für den mittleren Druckabfall einer Rohrströmung :

$$\left. \frac{dp}{dz} \right|_R \vec{e}_z = - \rho/2 \left(\frac{\lambda}{d_h} \frac{ds}{dz} \bar{w}_R^2 \right) \vec{e}_z \quad ; \quad \begin{aligned} ds &= |d\vec{s}| \\ dz &= |d\vec{z}| \end{aligned} \quad (5.22)$$

Im Weiteren soll mit :

$$\frac{| \nabla p_z^R |}{\rho/2 \bar{w}_R^2} = \frac{\lambda_R}{d_h} \frac{ds}{dz} \equiv \xi_0 \quad (1/m) \quad ; \quad \begin{aligned} ds &= dz \\ &(\text{vgl. Bild 5.5}) \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\text{und} \quad \bar{w}_R = \frac{Q}{A} = \frac{1}{A} \int_A \vec{w} \, d\vec{A} \quad (5.24)$$

die Grundkonstante ξ_0 sowie die mittlere Bezugsgeschwindigkeit $\bar{w}_R$ definiert sein. Der Druckgradient in Strömungsrichtung $\vec{e}_z$ ist also bei der (asymptotischen) Rohrströmung dem von jedem Fluidteilchen zurückgelegten Weg $d\vec{s}$ proportional.

Überträgt man diese Charakteristik auf die hier idealisierte Wirbel driftströmung, so folgt in Analogie zur Gl. 5.22 :

$$\left. \frac{dp}{dz} \right|_{\vec{w}_D} \vec{e}_z = - \rho/2 \left(\frac{\lambda_R}{d_h} \frac{ds}{dz} \vec{w}_D^2 \right) \vec{e}_z \quad (5.25)$$

bzw.
$$\frac{|\vec{v}_{pz}|}{\rho/2 \vec{w}_D^2} = \frac{\lambda_R}{d_h} \frac{ds}{dz} = \zeta_z^{\vec{w}_D} = \zeta_o \frac{ds}{dz} = \zeta_o \cdot \frac{ds}{d\phi} \frac{d\phi}{dz} \quad ; \quad ds \neq dz \quad (5.26)$$

$$\vec{w}_D \vec{e}_z = \frac{1}{V_W} \int_{V_W} \vec{w}(x,y,z) dV \quad (5.27)$$

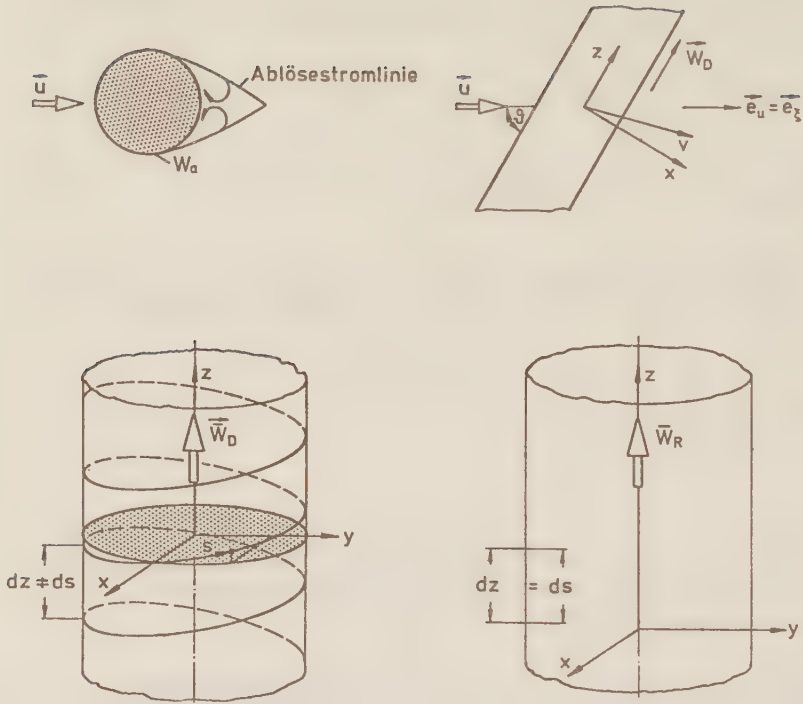
Die noch unbekannten Differentialquotienten in Gl. 5.26 $ds/d\phi$ und $d\phi/dz$ lassen sich durch die Parameterdarstellung für jeden Punkt t entsprechend Bild 5.5 ausdrücken.

Aus der Parameterdarstellung folgt dann die gesuchte funktionale Abhängigkeit für den Reibungsbeiwert. Mit 5.31 und 5.30 b) ergibt sich mit $r = R_\Gamma$ für die zu substituierenden Differentialquotienten :

$$\frac{ds}{d\phi} = \sqrt{R_\Gamma^2 + b^2} \quad \text{und} \quad \frac{d\phi}{dz} = \frac{1}{b}$$

Aus Gl. 5.26 erhält man für den (normierten) Druckgradienten :

$$\zeta_z^{\vec{w}_D} = \zeta_o \sqrt{1 + \left(\frac{R_\Gamma}{b}\right)^2} = \zeta_o \sqrt{1 + \kappa^2} \quad (5.32)$$



$$x = r \cos \phi \quad ; \quad dx = -r \sin \phi \, d\phi \quad ; \quad (dx/d\phi)^2 = r^2 \sin^2 \phi \quad (5.28 \text{ a,b,c})$$

$$y = r \sin \phi \quad ; \quad dy = r \cos \phi \, d\phi \quad ; \quad (dy/d\phi)^2 = r^2 \cos^2 \phi \quad (5.29 \text{ a,b,c})$$

$$z = b \phi \quad ; \quad dz = b \, d\phi \quad ; \quad (dz/d\phi)^2 = b^2 \quad (5.30 \text{ a,b,c})$$

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\phi}\right)^2} \, d\phi \quad (5.31)$$

Bild 5.5 Modellierung des Ablösegebietes

Durch den Ausdruck :

$$w_D = \dot{z} = \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = b \omega \quad (5.33)$$

$$b = \frac{\bar{w}_D}{\omega} \quad ; \quad \omega = \frac{w_a}{R_\Gamma} \quad w_a = \text{Ablösegeschwindigkeit}$$

$$\bar{w}_D = \text{mittlere Driftgeschwindigkeit der Wirbel}$$

$$R_\Gamma = \text{Wirbelradius} \quad (\text{vgl. Bild 5.4})$$

folgt unmittelbar die Bestimmungsgleichung für den Parameter κ :

$$\kappa = \frac{R_\Gamma}{b} = \frac{w_a}{\bar{w}_D} \quad (5.34)$$

Die Funktion von Gl. 5.32 ist in Bild 5.6 in parametrisierter Form dargestellt, um den Einfluß von R_Γ bzw. b zu verdeutlichen.

Das gefundene Widerstandsverhalten, das also die dissipativen Verluste im Wirbel wegaabhängig beschreibt, weist einige bemerkenswerte Aspekte auf :

so strebt für den Grenzfall der senkrechten Anströmung ($\theta = 90^\circ$, $R_\Gamma \rightarrow R_{90}$, $b \rightarrow 0$) der Wert von $\zeta_z^{w_D} \rightarrow \infty$, d. h. daß aus energetischen Gründen keine Driftbewegung normal zur Anströmebene stattfinden kann ($\bar{w}_D = 0$, stehender Wirbel).

Im anderen Extremfall, also bei achsenparalleler Strömung ($\theta = 0^\circ$, $R_\Gamma \rightarrow 0$, $b \rightarrow \infty$) geht die Funktion asymptotisch in den Eckwert $\xi_0 = \text{const}$ über. Das bedeutet, daß das mit Gl. 5.23 formulierte Widerstandsgesetz der reibungsbehafteten Rohrströmung identisch wiedergegeben wird.

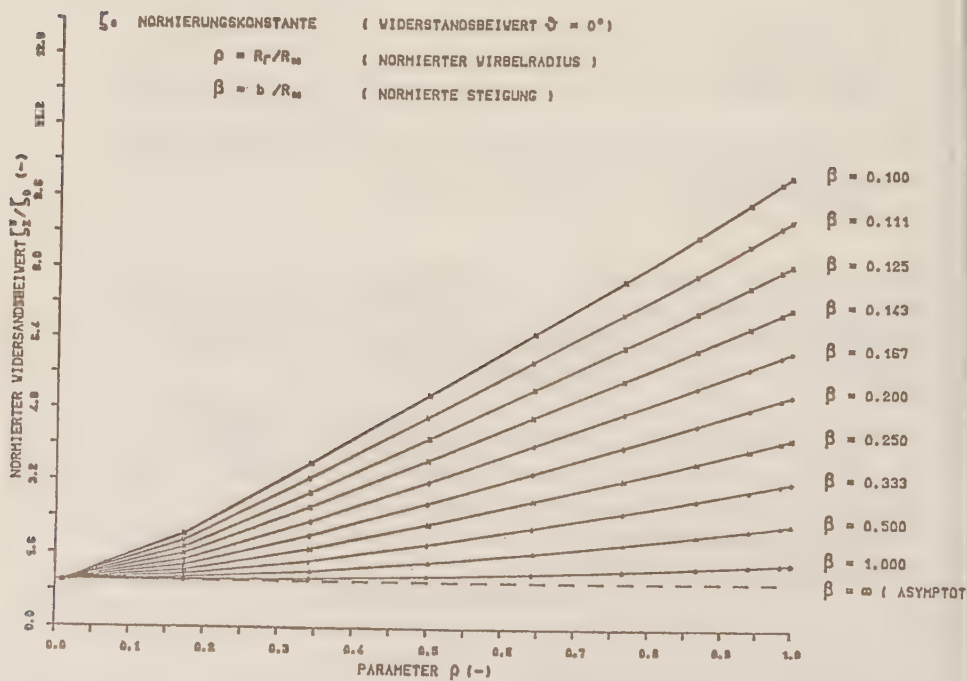
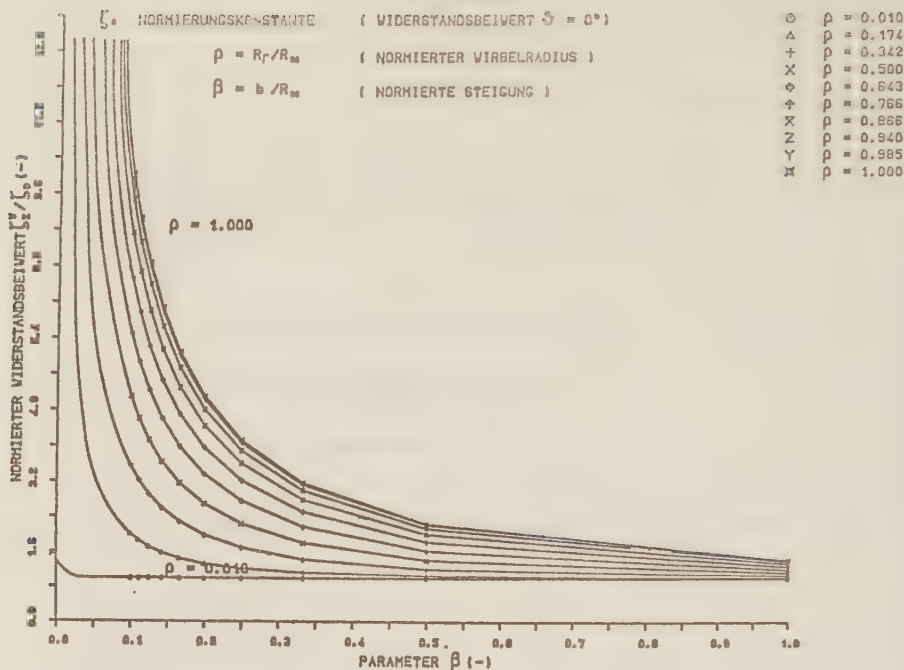


Bild 5.6 Parametrisierte Darstellung des Widerstandsverhaltens für idealisierte, drehungsbehaftete Wirbel (nach Gl. 5.32)

Für alle dazwischenliegenden Werte von $\kappa = R_{\Gamma}/b = f(\theta)$ sind die dissipativen Reibungsbeiträge im Sinne des benutzten Gedankenmodells eindeutig quantifizierbar, wenn die Winkel- und Re-abhängigen Ablöseverhältnisse aus der Grenzschichtrechnung bekannt sind.

Für die praktische Rechnung lohnt es sich allerdings nicht, für jeden Variationswinkel eine Grenzschichtrechnung durchzuführen, da für das Gesamtergebnis der axiale Druckverlustbeitrag nach den vorliegenden experimentellen Daten ohnehin nur eine untergeordnete Rolle spielt. Aus diesem Grund wird im folgenden eine Näherungsformel für den axialen Druckabfall im Stabgitter angegeben, die die wesentlichen Tendenzen des Experiments befriedigend wiedergibt. Als Abschätzung genügt im weiteren die Gl. 5.32 die alle wesentlichen Eigenschaften dieser Modellvorstellungen zusammenfaßt :

$$\zeta_z^{\frac{w_D}{w_a}} = \xi_0 \sqrt{1 + \left(\frac{R_{\Gamma}^2}{b^2}\right)} = \xi_0 \sqrt{1 + \left(\frac{w_a}{w_D}\right)^2} \quad (5.35)$$

5.3 Bewertender Vergleich zwischen theoretischen Näherungslösungen und experimentell gefundene Korrelationen

Theoretische Zwischenrechnungen mit dem Variationsmodell (5.16 und 5.17), sowie eine Analyse der Versuchsergebnisse von BÖTTGENBACH und HOLLENHORST zeigen, daß über den gesamten Meßbereich $30^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ die "freie" Strömung v' zwischen den Stäben nahezu senkrecht die Stabreihen passiert, während der axiale Massentransport vorwiegend im Ablösegebiet parallel zur Stabachse stattfindet. Das bedeutet, daß die Ablösegeschwindigkeit w_a sowie die Wirbeldriftgeschwindigkeit $\bar{w}_D$ in Gl. 5.34 mit guter Näherung durch die Ausdrücke :

$$w_a \approx v'_x = \frac{v_x}{\lambda} = \frac{u_x}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} u \sin \theta \quad ; \quad \lambda = \frac{V_{v'}}{V_F} \quad (5.36)$$

$$\bar{w}_D = \frac{w}{(1-\lambda)} = \frac{u_z}{(1-\lambda)} = \frac{1}{(1-\lambda)} u \cos \theta \quad ; \quad (1-\lambda) = \frac{V_{w'}}{V_F} \quad (5.37)$$

ersetzt werden kann (vgl. Bild 5.1 sowie Gl. 5.3, 5.4). Mit diesen Substitutionen findet man dann aus 5.34 für die Größe κ :

$$\kappa = \frac{w_a}{\bar{w}_D} = \frac{1-\lambda}{\lambda} \tan \theta \quad (5.38)$$

so daß die theoretisch abgeleitete Formulierung 5.32 bzw. 5.35 für die dissipativen Verluste im Ablösegebiet einfach zu beschreiben sind. Die Funktion ζ_z^{wD} ist in Bild 5.7 für verschiedene λ -Werte aufgetragen und verdeutlicht anschaulich den Einfluß des geometrieabhängigen Ablöseverhaltens ($V_{w'}/V_F = 1 - \lambda$). Messungen von FLÜGGE / 4 / an einer versetzt fluchtenden Dreiecksanordnung (vgl. Bild 5.8) bestätigen, daß der Anteil der freien Strömung $\lambda = V_{v'}/V_F$ sich nur schwach mit dem Anströmwinkel ändert, d. h., daß der mit Gl. 5.38 getroffene Näherungsausdruck auch experimentell abgesichert ist.

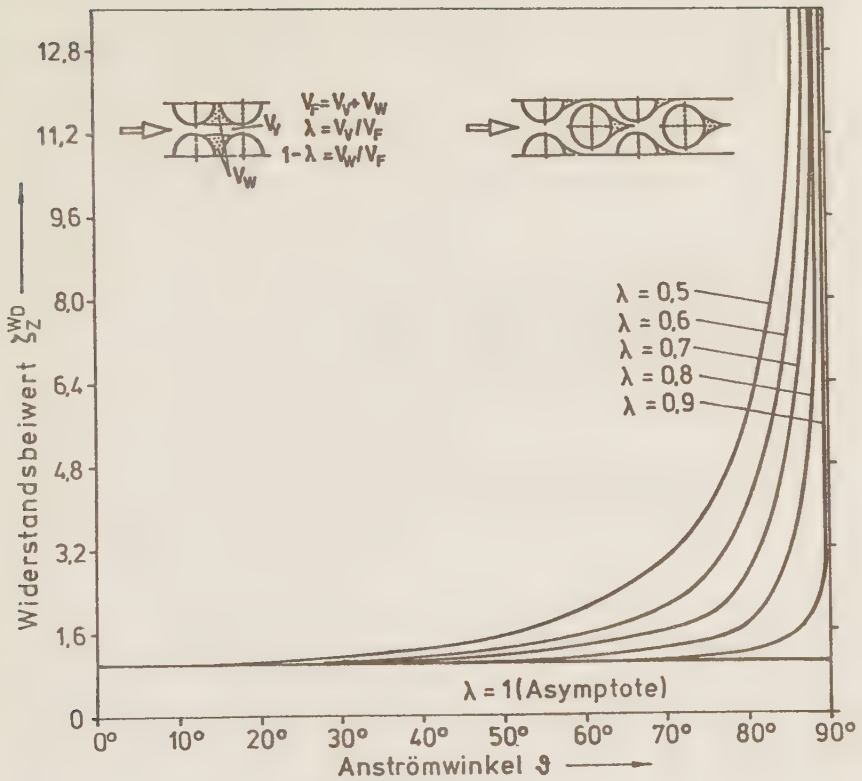


Bild 5.7 Geometrie- und winkelabhängiger Druckabfall im Ablösegebiet (nach Gl. 5.35, 5.38)
 (Normierungskonstante ξ_0)

$$\left(\xi_0 = 1.2 \text{ 1/m} ; \text{ Re } = 10^5 ; \zeta_z^{wD} = \frac{\nabla_p^{wD}}{\xi_0 \rho / 2 w_D^2} \right)$$

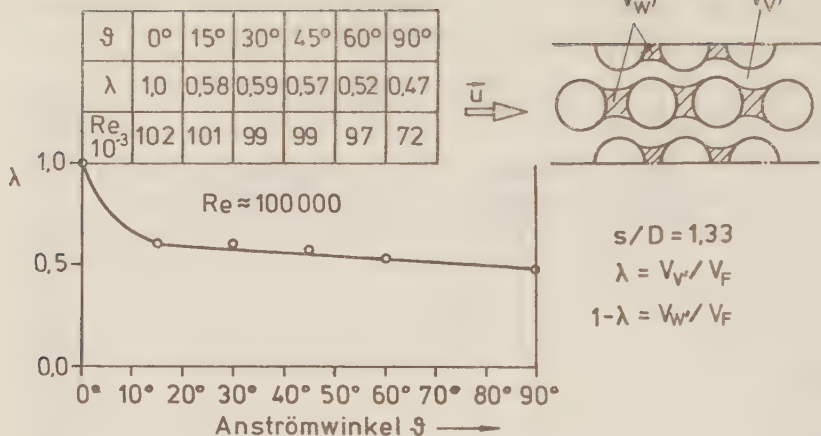


Bild 5.8 Ablöseverhalten einer versetzt fluchtenden Dreiecksanordnung (L-2-F Messung von FLÜGGE /4/)

Der Zusammenhang zwischen der Wirbel driftströmung $\vec{w}_D$ und der Außenströmung $\vec{v}'$ ("Antrieb"), der entsprechend der Fundamenteleigenschaft der (gekoppelten!) Bewegungsgleichungen gefordert werden muß, ist im Variationsansatz schon implizit enthalten. Ein Vergleich von 5.16 mit 5.17 verdeutlicht diesen Sachverhalt:

$$\zeta_z^u(\theta, Re^u) = \frac{|\vec{v}_z^u|}{\rho/2 u^2} = \zeta_x^u \tan \epsilon_v + \xi_w (\cos \theta - \sin \theta \tan \epsilon_v)^2 \quad (5.39)$$

$$= \xi(\epsilon_v, Re^v) \frac{\sin \epsilon_v}{\cos^2 \epsilon_v} \sin^2 \theta + \quad (5.17)$$

$$+ \xi_w (\cos \theta - \sin \theta \tan \epsilon_v)^2$$

so daß sich diese Formulierung zum Vergleich mit den empirisch gefundenen Korrelationen von BÖTTGENBACH und HOLLENHORST anbietet.

An dieser Stelle kommt das in Tab. 5.1 zusammengefaßte Grenzwertverhalten des axialen Druckgradienten ζ_z^u zum Tragen. Für $\theta = 90^\circ$ verschwindet der Funktionswert $\zeta_z^u \equiv 0$, während der Gradient $d\zeta/d\theta$ für $\theta \rightarrow 90^\circ$ einem endlichen Grenzwert ($-\xi_{90} = 35 \text{ l/m}$) zustrebt. Daraus läßt sich der steile Anstieg von ζ_z im Bereich großer Anströmwinkel $75 \leq \theta \leq 90^\circ$ (vgl. Bild 5.3) erklären, so daß dieser - durch Messungen nicht abgesicherte Teilbereich - aus der theoretischen Darstellung unmittelbar verständlich wird.

Für die weitere Abschätzung erweist es sich als zweckmäßig, die Beziehung 5.17 des Variationsmodells mit Hilfe der gefundenen Ansätze 5.35 und 5.38 in eine übersichtlichere Form zu bringen. Zunächst fällt auf, daß das experimentell gefundene Widerstandsverhalten $\zeta_z^{\text{Ex}} \approx \xi_0 / \cos \theta$ über den Meßbereich von $30^\circ \leq \theta \leq 75^\circ$ qualitativ dasselbe Verhalten wie die zuvor abgeleitete Widerstandsfunktion ξ_z^{WD} aufweist (Bild 5.7).

Es läßt sich zeigen, daß der Variationsansatz 5.17 durch die Näherungsformel :

$$\zeta_z^u = \frac{|\nabla p_z^u|}{\rho/2 u^2} \approx \zeta_z^{\text{WD}} = \zeta_z^{\text{WD}} \underbrace{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}_1 \quad (5.40)$$

$$\text{mit} \quad \zeta_z^{\text{WD}} = \sqrt{1 + \kappa^2} \quad (5.35)$$

$$\kappa = \frac{w_a}{w_D} = \frac{1-\lambda}{\lambda} \tan \theta \quad (5.38)$$

ersetzt werden darf, da der Klammerausdruck des zweiten Terms in 5.17 für kleine Winkel ε_v durch $\cos^2 \theta$ gut approximiert wird.

Eine zahlenmäßige Überprüfung, z. B. im Bereich des deutlich ausgeprägten Maximums, also für $\theta \approx 75^\circ - 80^\circ$ bestätigt, daß auch das Produkt :

$$\xi(\epsilon_V, \text{Re}^V) = \frac{\sin \epsilon_V}{\cos^2 \epsilon_V}$$

im ersten Term von 5.17 durch die Funktion ζ_z^{wD} ausreichend genau wiedergegeben wird. ($\epsilon_V \approx 3^\circ - 5^\circ$; $\xi(\epsilon_V) = \xi^e(\theta=90-\epsilon_V) \approx 35 \text{ 1/m}$)

Die infolge der Vereinfachungen in Kauf genommene Singularität bei $\theta = 90^\circ$ läßt sich wieder beseitigen, wenn das erste Glied von Gl. 5.40 mit dem Faktor :

$$\frac{\cos^2 \theta}{B_Y + \cos^2 \theta} \approx 1 \quad ; \quad B_Y \ll \cos^2 \theta \quad (5.41)$$

$$B_Y \rightarrow 0$$

erweitert wird, wobei die additive Konstante B_Y keinen physikalischen Charakter trägt und willkürlich mit $B_Y = 10^{-2}$ festgelegt sein soll. Man erhält durch die Erweiterung somit den Ausdruck :

$$\zeta_z^u = \frac{|\nabla p_z^u|}{\rho/2 u^2} \approx \zeta_z^{wD} \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{B_Y + \cos^2 \theta} + \zeta_z^{wD} \cos^2 \theta \quad (5.42)$$

Für die hier durchgeführten Abschätzungen, die an dieser Stelle nur zu Vergleichszwecken und zur Durchleuchtung des physikalischen Hintergrundes der im Experiment gewonnenen Korrelationen dienen soll, genügt die früher begründete, einfache funktionale Abhängigkeit von Gl. 5.35 für den Reibungsbeiwert ζ_z^{wD} der Wirbeldriftströmung :

$$\zeta_z^{wD} \approx \zeta_0 \sqrt{1 + \kappa^2} \quad ; \quad \kappa = \frac{w_a}{w_D} = \frac{1-\lambda}{\lambda} \tan \theta \quad (5.35)$$

$$(5.38)$$

Zumindest für die von BÖTTGENBACH gemessene fluchtende Vierecksanordnung kann davon ausgegangen werden, daß fast die gesamte Schattenfläche der Stäbe als Ablösegebiet ausgebildet ist (vgl. Messung FLÜGGE, Bild 5.8), so daß wegen $\lambda \approx 0,5$ bzw.

$$\frac{1-\lambda}{\lambda} \approx 1 \quad \text{und} \quad \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = 1/\cos \theta \quad (5.43)$$

$$\zeta_z^{WD} \approx \xi_0 / \cos \theta \quad (5.44)$$

als brauchbare Näherung von (5.35) angesetzt werden darf. Damit ist in Verbindung mit Gl. 5.40 bzw. 5.42 :

$$\frac{|\nabla p_z^u|}{\rho/2 u^2} \approx \zeta_z^{WD} \approx \xi_0 / \cos \theta \approx \frac{\xi_0 \cos \theta}{\cos^2 (0.9 \theta)}$$

die von BÖTTGENBACH aufgestellte Korrelation im wesentlichen bestätigt und über das theoretisch abgeleitete Widerstandsverhalten unmittelbar verständlich geworden.

Setzt man statt der zur Abschätzung benutzten Näherungsgleichung 5.44 $\zeta_z^{WD} \approx \xi_0 / \cos \theta$ die vollständige Funktion für ζ_z^{WD} nach Gl. 5.35 in die mathematisch gleichwertige Beziehung 5.42 ein, ergibt sich ein mit der Messung fast identischer Kurvenverlauf für den axialen Druckgradienten. Die im Experiment beobachtete Überhöhung wird deutlich reproduziert, wobei die λ -Abhängigkeit den Einfluß der durchströmten Geometrie (Ablöseverhalten!) wieder spiegelt. (vgl. Bild 6.3 im Anhang)

In diesem Zusammenhang soll auch die von HOLLENHORST angegebene Darstellung etwas eingehender untersucht werden. Der Autor benutzt ebenfalls den von ZIEGLER vorgeschlagenen Grundansatz 5.1:

$$\text{grad } p = - \rho/2 \left| \vec{u} \right| \zeta \vec{u}$$

wobei er allerdings im Gegensatz zu BÜTTGENBACH die Matrix ξ in allen Elementen besetzt :

$$\xi = \begin{pmatrix} C_x & (C_y - C_x) f_{xy}(\theta) \\ (C_x - C_y) f_{yx}(\theta) & C_y \end{pmatrix}; \quad f_{xy}(\theta) = A_x \frac{\sin \theta \cos \theta}{B_x + \sin^2 \theta} \quad (5.45)$$

$$f_{yx}(\theta) = A_y \frac{\sin \theta \cos \theta}{B_y + \cos^2 \theta}$$

Als Hauptvorteil dieser "modifizierten" Form wird vom Autor die Tatsache angesehen, daß alle vorliegenden Messungen (BÜTTGENBACH, WINTER, HOLLENHORST) durch diese Beschreibung in zufriedenstellender Weise reproduziert werden können und der Übergang in den isotropen Fall gewährleistet ist. Die freien Konstanten A_i und B_i müssen dabei den jeweiligen Strukturparametern angepaßt und die Eckdaten C_i aus der Literatur entnommen werden.

Wie ist aus theoretischer Sicht diese Formulierung zu bewerten ?

Zur Beurteilung soll die hier diskutierte theoretische Näherungsformel 5.42 für den axialen Druckabfall herangezogen und der empirischen Beschreibung gegenübergestellt werden. Ersetzt man zunächst wieder in Gl. 5.42 die Funktion ξ_z^{WD} durch die in 5.44 angegebene Abschätzung, so ergibt sich folgender Ausdruck :

$$\frac{|\nabla p_z^u|}{\rho/2 u^2} \approx \xi_0 \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{B_y + \cos^2 \theta} + \xi_0 \cos \theta \quad \begin{matrix} \text{theoretische Näherungsformel} \\ B_y \rightarrow 0 \end{matrix}$$

Die dazu analoge Beschreibung aus der Matrixdarstellung 5.45 lautet :

$$\frac{|\nabla p_z^u|}{\rho/2 u^2} = \text{const} \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{B_Y + \cos^2 \theta} + \xi_0 \cos \theta$$

empirisch gefundene
Beschreibung: $B_Y = 0.056$
 $\text{const} = (\xi_{90} - \xi_0) A_Y$
 $C_x \equiv \xi_{90}$; $C_y \equiv \xi_0$

Die formale Übereinstimmung der beiden Gleichungen ist offensichtlich, da der Ausdruck

$$(\xi_{90} - \xi_0) \cdot A_Y \approx \xi_0$$

ziemlich genau die Grundkonstante für den achsenparallelen Grenzfall $\theta = 0$ der jeweils zu beschreibenden Anordnung ergibt. (vgl. Tab. 5.2)

Tab. 5.2 Empirisch korrelierte Konstanten nach HOLLENHORST /5/

Geometrie	ξ_{90} (1/m)	ξ_0 (1/m)	A_Y (-)	$(\xi_{90} - \xi_0) A_Y$ (1/m)	B_Y (-)
	35	<u>1.2</u>	0.038	<u>1.28</u>	0.056
	82.4	<u>1.8</u>	0.018	<u>1.45</u>	0.063

Zusammenfassend läßt sich daher an dieser Stelle schon feststellen, daß die durchgeführte Abschätzung das axiale Widerstandsverhalten in ausreichender Genauigkeit wiedergibt.

Die theoretisch gefundene Näherungsformel, die - im Sinne des zu Grunde liegenden einfachen Modells des idealisierten Wirbels - keine Einschränkung bezüglich der Allgemeinheit aufweist, liefert eine Beschreibung für das Widerstandsverhalten, bei deren Ableitung geometrische und strömungsmechanische Parameter miteinander verknüpft worden sind. So bestimmt die gerechnete Struktur in Verbindung mit der Re-Zahl den Ablösepunkt und damit die individuelle Größe des Ablösegebietes, was in den Parametern R_T und $(1-\lambda)$ zum Ausdruck kommt. Kontinuitätsforderungen sind über die Ablöse- bzw. Driftgeschwindigkeit in der eingeführten Größe b verarbeitet, so daß über die Kenntnis dieser relevanten Variablen, die Funktion ζ_z^{WD} letztlich eindeutig angegeben werden kann.

$$(R_T / b \approx w_a / \bar{w}_D = \frac{1-\lambda}{\lambda} \tan \quad ; \quad \text{vgl. 5.38})$$

Im Gegensatz dazu verlangt die Anwendung der empirisch gefundenen Korrelation die Kenntnis des Widerstandsverhaltens. Es wird also grundsätzlich eine Messung vorausgesetzt, damit die freien Konstanten überhaupt angepaßt werden können.

In diesem Zusammenhang erhebt sich die Frage nach der Übertragbarkeit der Darstellung von 5.45 auf andere Geometrieverhältnisse. Entsprechend den in der Tab. 5.2 zusammengefaßten Daten ist ein physikalischer Charakter der Größe A_y ebenso in Frage zu stellen, wie der Konstanten B_y , die ebenfalls nur zur Vermeidung der Singularität bei $\theta = 90^\circ$ eingeführt wurde. Aus dieser Sicht der Theorie erscheint es daher vernünftig, eine Matrixbesetzung zu verlangen, die z. B. das in Tab. 5.1 zusammengestellte Grenzwertverhalten berücksichtigt. Darüberhinaus bietet sich noch die Verwendung der angegebenen Beziehung 5.35 an, um direkt das geometrieabhängige Ablöseverhalten zu erfassen. Möglicherweise konzentriert sich dann die Problematik "nur" noch auf die Größe λ , die aus Messungen bzw. aus Stromlinienbildern zu ermitteln ist. (hier : $\lambda = 0.87$)

6. Diskussion und bewertende Zusammenfassung der Ergebnisse

Für das hier interessierende Widerstandsverhalten bei Schräganströmung wurde die von HOLLENHORST /5/ durchgemessene Anordnung als Referenzgeometrie zugrunde gelegt. Darüberhinaus wurde ein weiteres Beispiel aus einer Versuchsreihe von ACHENBACH / 42 / nachgerechnet, der gezielt Einzelheiten in der Stabgitterzelle experimentell untersuchte. Aus diesem Grund erlauben die nachfolgend zusammengestellten Ergebnisse gleichzeitig eine Bewertung des zugrundeliegenden theoretischen Modells. Um eine Reproduzierbarkeit der erhaltenen Daten zu gewährleisten, sind alle wichtigen Zwischenergebnisse in den jeweiligen Textpassagen dieser Arbeit erläutert und an den entsprechenden Stellen mit-angegeben. Alle Bilder, auf die sich die nachstehende Diskussion bezieht, sind aus Gründen der Übersichtlichkeit im Anhang zusammengestellt.

6.1 Widerstandsverhalten im Stabgitter

1. Eckdaten der Widerstandsbeiwerte ξ_{90} und ξ_0 für senkrechte bzw. achsenparallele Anströmung

Beide Grenzfälle : $\theta \rightarrow 90^\circ$ bzw. $\theta \rightarrow 0^\circ$ sind in den Bildern 6.1 und 6.2 für den von HOLLENHORST /5/ gemessenen Re-Zahlenbereich ($5 \cdot 10^4 \leq Re \leq 1.25 \cdot 10^5$) ausgewertet und zu Vergleichszwecken anderen Literaturangaben gegenübergestellt. Die aus dem Experiment bekannte Eigenschaft, daß mit zunehmender Re-Zahl der Widerstandsbeiwert abnimmt, wird über den beschriebenen Formalismus der Grenzschichttheorie erfaßt und quantitativ bestätigt. Die Ergebnisse zeigen, daß die Re-Abhängigkeit des Widerstandsbeiwertes eindeutig auf das "stromabwärts Wandern" des Ablösepunktes zurückzuführen ist (vgl. Bild 6.6). Diese Tendenz bleibt bis zur sog. kritischen Re-Zahl erhalten. Hier wird das Widerstandsminimum und gleichzeitig die Gültigkeitsgrenze der vorliegenden Theorie erreicht. Eine weitere Steigerung von Re führt - infolge komplexer Vorgänge in der Grenzschicht - wieder zu einem früheren Ablösen und damit zu einer leichten Erhöhung des Widerstandsbeiwertes, bis sich schließlich im transkritischen Bereich ein asymptotischer Grenzwert $\xi_\infty \approx \text{const}$ einstellt.

Dieses Verhalten - insbesondere der Nachweis des sich einstellenden Widerstandsminimums - sind durch Messungen von ACHENBACH /42/ NIGGESCHMIDT / 28 / und HEINECKE / 18 / in Bündeln mit verschiedener Teilung experimentell abgesichert.

Derart hohe Re-Zahlen werden in der technischen Praxis allerdings kaum realisiert, so daß das Hauptinteresse - und damit auch die Gültigkeitsgrenze der meisten Literaturangaben - sich auf mittlere Re-Zahlen bis Re_{krit} konzentriert. Die im Anhang beigefügte Tab. 6.1 vermittelt einen Überblick über die wichtigsten Quellen, deren Meßbereich und damit auch die angegebenen Korrelationen die hier gerechnete Geometrie und den erforderlichen Re-Bereich abdecken. Diese Daten sind im oberen Diagramm von Bild 6.1 eingezeichnet, um einen direkten Vergleich zwischen Theorie und den verschiedenen Experimenten aufzuzeigen, wobei die gepunktet hinterlegte Fläche das von HOLLENHORST /5/ angegebene Fehlerband ($\pm 23\%$) kennzeichnet.

In Bild 6.2 ist die Umgebung für den achsenparallelen Grenzfall vergrößert herausgezeichnet. Da noch keine Messung für $\theta < 30^\circ$ vorliegt, wurde dieser Winkelbereich detaillierter nachgerechnet. Die gerechnete Stützpunktdichte von $\theta_i = 30^\circ, 25^\circ, 20^\circ, 15^\circ, 10^\circ, 7,5^\circ, 5^\circ$ und 1° erlaubt eine begründbare Extrapolation der Daten für die achsenparallele Anströmung, da dieser Fall vom Modell nicht erfaßt wird. Bemerkenswert erscheint, daß die aus der Theorie bestimmbare endliche Steigung im Grenzfall $\theta = 0^\circ$ von der Numerik deutlich erkennbar wiedergegeben wird.

Die Meßwerte für $\xi_0(Re)$ sind nach den in Tab. 6.2 zusammengefaßten Literaturreferenzen berechnet. Die angegebenen Zahlenwerte bestätigen auch für $\theta = 0^\circ$ eine befriedigende Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment.

2. Druck- und Geschwindigkeitsfeld im schrägangeströmten Stabgitter

Der in Kap. 5.1 aufgezeigte Weg, das im Experiment beobachtete Widerstandsverhalten als Funktional der Geometrie und den Strömungsparametern aufzufassen, führt über den angegebenen Variationsansatz auf eine 2-dimensionale (integrale) Beschreibung des Druck- und Geschwindigkeitsfeldes im Stabgitter.

Die wesentlichsten Ergebnisse der Variationsrechnung sind in den Bildern 6.3 bis 6.5 aufgeführt. In Anlehnung an die experimentellen Arbeiten /5, 6/ ist die vektorielle Größe $\nabla p(\theta)$ durch die (normierten) Komponenten $|\nabla p_x|$ bzw. $|\nabla p_z|$ dargestellt und die Richtung des Vektors durch den Winkel $\alpha(\theta)$ verdeutlicht. Ein Vergleich der Größenordnungen zwischen $|\nabla p_x|$ und $|\nabla p_z|$ zeigt, daß der Betrag von ∇p im wesentlichen durch seine x-Komponente beschrieben wird, während der axiale Beitrag eine untergeordnete Rolle spielt.

Für den axialen Druckabfall, der in Kap. 5.2 und 5.3 schon eingehender diskutiert wurde, ist zwischen der vorliegenden Theorie und den experimentellen Ergebnissen nach Bild 5.3 eine Inkonsistenz festzustellen. So fordert das zugrundeliegende theoretische Modell über die Variable λ eine Abhängigkeit von der Geometrie und damit vom Ablöseverhalten bzw. von dem sich ergebenden Totwasserbild. Die im Experiment festgestellte, typische Überhöhung bei $\theta \approx 75^\circ - 80^\circ$ wird von der Theorie deutlich erkennbar reproduziert (Bild 6.3); jedoch ist dieser Effekt offensichtlich mit kleiner werdendem Wirbelgebiet ($\lambda \rightarrow 1$) zunehmend schwächer ausgeprägt. Insofern ist die von HOLLENHORST /5/ gemessene Lage des Maximums (Dreiecksanordnung: $\lambda \approx 0.87$) auf fast gleicher Höhe wie bei der Vierecksanordnung ($\lambda \approx 0.52$) aus theoretischer Sicht nicht verständlich. (vgl. Bild 5.3 a), b) !)

Der ermittelte Druckabfall in radialer Richtung deckt sich innerhalb des Meßintervalls $30^\circ \leq \theta \leq 75^\circ$ weitgehend mit dem experimentellen Ergebnis, was durch die gepunktet hinterlegte Fläche in Bild 6.4 a) verdeutlicht ist. In Bild 6.4 b) sind alle gerechneten Stützwerte durch Kreise (O) gekennzeichnet und die Meßpunkte ($\square$) θ_i , Re_j zur Orientierung zusätzlich miteingetragen. Größere Abweichungen zwischen Theorie und der (geglätteten) Matrix-Darstellung (Gl. 5.52) sind insbesondere bei kleinen Anströmwinkeln festzustellen.

Möglicherweise ist diese Diskrepanz darauf zurückzuführen, daß die "unendliche" Anordnung schon bei $\theta = 30^\circ$ im Versuchsstand (baubedingt) nicht mehr ausreichend gewährleistet ist, so daß Randeinflüsse die Messung stören oder verfälschen. Darüberhinaus kommt ein weiterer Effekt hinzu, der eine sorgfältige Meßwertaufnahme in diesem Bereich erschwert:

Nach den vorliegenden Ergebnissen richtet sich die "glatte" Strömung zwischen den Stäben bei kleinen Winkeln θ zunehmend in Richtung der Stabachse aus. Dieses Verhalten ist qualitativ nach Bild 6.5 aus dem Verlauf des Winkels ε_p zu entnehmen, der die winkelabhängige Abweichung des resultierenden Druckgradienten von der Stabnormalen beschreibt. Die gute Übereinstimmung für $\alpha(\theta)$ zwischen Theorie und dem Experiment belegt, daß die zugrundeliegende Modellvorstellung offensichtlich die wesentlichen physikalischen Effekte erfaßt.

6.2 Einzelheiten in der Zelle

Wie gezeigt, liefert die Theorie noch weitere Detail-Informationen in der Zelle, deren Berücksichtigung bei zukünftigen Versuchen eine gezielte Meßwertaufnahme erleichtern. So wird z. B. die Kenntnis der θ -abhängigen mittleren Richtung der "freien" Strömung eine Hilfestellung beim Ausrichten von Sonden bedeuten, während die sich einstellenden Profile zwischen den Stäben zusätzlich für eine Korrektur bzw. Fehlerabschätzung herangezogen werden können. Die Integration der Druck- und Schubspannungsverläufe ergibt über die ausgewerteten c_w -Beiwerte sofort die resultierenden Kräfte auf den Stab, so daß daraus die notwendige Anzahl von Abstandshaltern bestimmbar wird, sofern die zulässige Durchbiegung in der Anordnung auf ein bestimmtes Maß begrenzt bleiben soll.

Aus diesen Gründen (sowie um ein Zufallsergebnis der gerechneten 60°-Geometrie weitestgehend auszuschalten) wurde ein weiteres Beispiel aus einer Versuchsreihe von ACHENBACH / 42 / nachgerechnet, der neben Widerstandsbeiwerten auch Einzelheiten - wie Druck- und Schubspannungsverlauf - am Zentralstab der Anordnung durch Messungen ermittelt hat.

Die Diagramme in Bild 6.6 zeigen die Ergebnisse des Experiments ($\theta = 90^\circ$; $S_1/D = 2$, $S_2/D = 1.4$), wobei nach Angaben des Autors die eingezeichneten Widerstandsbeiwerte durch :

$$\xi = \xi_{\text{Reihe}}^{\text{max}} = \frac{\Delta p}{(\rho/2) \bar{w}_{\text{max}}^2 z}$$

Δp : Druckabfall über die gesamte Anordnung
 $\bar{w}_{\text{max}}$: mittlere Geschwindigkeit im engsten Querschnitt normal zur Anströmrichtung
 z : Anzahl der Stabreihen in Strömungsrichtung

ermittelt wurden.

Für die Rechnung wurde als Beispiel $Re_{\text{max}} = 130.000$ zugrunde gelegt, da hierfür die gemessenen Druck- und Schubspannungsverteilungen in der zitierten Quelle mitangegeben waren. Die Auswertung der Rechnung ist in Bild 6.7 zusammengestellt. Man erkennt, daß die theoretisch ermittelte, azimutale Druckverteilung $c_p(\beta)$ am Zentralstab der gerechneten Anordnung sich im wesentlichen mit der gemessenen deckt, und die getroffene Voraussetzung : $c_p = \text{const}$ hinter der Ablösestelle ($\beta_A \approx 133^\circ$) auch bei dieser Geometrie experimentell verifiziert ist. Der Schubspannungsverlauf entlang der Kontur liegt insgesamt etwas tiefer als die Messung. Offensichtlich erfolgt der tatsächliche Grenzschicht-Umschlag laminar/turbulent schon früher, also bei kleineren Winkeln. Im Bereich der vollausgebildeten, turbulenten Grenzschichtströmung ab $\beta \approx 110^\circ$ stimmt dann Theorie und Experiment wieder gut überein. Der negative Verlauf der Schubspannung hinter der Ablösestelle bei $\beta > 133^\circ$ weist auf die Strömungs-umkehr im Ablösegebiet hin.

In diesem Zusammenhang soll auf ein weiteres interessantes Detail aufmerksam gemacht werden : Aus der angegebenen Definitionsgleichung für $c_p(\beta)$ läßt sich unmittelbar die Geschwindigkeitsverteilung der Außenströmung entlang der Kontur zurückrechnen :

$$\frac{w^2(\beta)}{\bar{w}_{\text{max}}^2} = 1 - c_p(\beta)$$

d.h., daß bei $\beta \approx 40^\circ$ (wegen $c_p \approx 0$) die Konturgeschwindigkeit $|w(\beta)|$ schon die Größenordnung der mittleren Maximalgeschwindigkeit $|\bar{w}_{\text{max}}|$ im engsten Querschnitt ① - ④ erreicht hat.

Für die Stelle $\theta = 90^\circ$ erhält man dann entsprechend der Druckabsenkung auf $c_p \sim 0.8$ eine Geschwindigkeitsüberhöhung von ca. 34 % gegenüber dem Mittelwert $|\bar{w}_{\max}|$:

$$\frac{w^2(\beta=90^\circ)}{\bar{w}_{\max}^2} \approx 1.8 \quad \text{bzw.} \quad \frac{w(\beta=90^\circ)}{\bar{w}_{\max}} \approx 1.34$$

ACHENBACH schließt aus seinen Messungen, daß demnach zwischen den Stäben im Querschnitt ① - ④ ein Profil entsprechend der qualitativen Skizze in Bild 6.6 vorhanden sein muß. Tatsächlich bestätigt die theoretisch ermittelte Geschwindigkeitsverteilung diese Vermutung, wobei offenbar die darauffolgenden Stäbe ② und ③ diesen "Verdrängungseffekt" bewirken. Die in Bild 6.7 zusätzlich mitausgewerteten Diagonalquerschnitte weisen dagegen eine relativ gleichmäßige Geschwindigkeitsverteilung auf, was aber aus dem durchströmten Strukturbild unmittelbar plausibel erscheint.

Zusammenfassend läßt sich daher feststellen, daß die theoretische Feinstrukturanalyse die im Experiment beobachteten Effekte genügend genau wiedergibt.

Die ausgewerteten Integrale für die Druck- und Schubspannungsverteilung liefern die in Bild 6.7 angegebenen dimensionslosen Beiwerte mit :

$$\begin{aligned} c_D &= 0.405 & ; & \text{ nach Gl. 4.34} \\ c_f &= 0.011 & ; & \text{ nach Gl. 4.41} \\ \text{bzw. } c_w &= 0.416 & ; & \text{ nach Gl. 4.42} \end{aligned}$$

so daß sich nach der abgeleiteten Beziehung 4.49 der Widerstandsbeiwert pro Reihe zu :

$$\xi_{\text{Reihe}}^{\max} = \frac{c_w}{a} = 0.208 \quad ; \quad Re^{\max} = 1.3 \cdot 10^5$$

errechnet.

Die Zahlenwerte verdeutlichen, daß der Reibungsbeitrag infolge der Schubspannungen eine untergeordnete Rolle spielt. Man erhält die Größenordnung :

$$\frac{\xi_f}{\xi_{\text{Reihe}}^{\text{max}}} = \frac{c_f}{c_w} = \frac{0.011}{0.416} \approx 2.65 \%$$

d.h., daß die oben andiskutierten Abweichungen im Schubspannungsverlauf kaum das Gesamtergebnis beeinflussen. Greift man aus den Diagrammen von Bild 6.6 die Meßergebnisse für das hier gerechnete Beispiel von $Re^{\text{max}} = 1.3 \cdot 10^5$ ab, so stellt man fest, daß beide theoretisch ermittelten Daten : $\xi_{\text{Reihe}}^{\text{max}} = 0.208$ bzw. $\xi_f/\xi_{\text{ges}} = 2.65 \%$ im Rahmen der Ablesegenauigkeit mit den Meßwerten von ACHENBACH übereinstimmen.

Zur Vervollständigung sollen die Geschwindigkeitsverhältnisse im achsenparallelen Grenzfall $\theta = 0^\circ$ noch kurz andiskutiert werden. Hier bestimmen alleine die Schubspannungen den axialen Druckabfall, da keine Ablöseerscheinungen mehr auftreten. Die sich ausbildende Geschwindigkeitsverteilung in der Zelle ist in Bild 6.8 nach den Meßergebnissen von TRIPPE / 47 / skizziert und zur Verdeutlichung für die engsten Querschnitte gesondert abgetragen.

Da das vorliegende Modell diesen Grenzfall nicht erfaßt, wurde als grobe Abschätzung die potential-theoretische Geschwindigkeitsverteilung in das Diagramm von Bild 6.8 zu Vergleichszwecken miteingetragen. Die nahezu konstante Geschwindigkeitsverteilung resultiert aus einer Rechnung bei der nur zwei parallellliegende Ellipsen ($a : b \approx 57 : 1 \hat{=} \theta = 1^\circ$) die längs-angeströmten Rohre ersetzen sollen. Obwohl damit eine Vergleichbarkeit der Ergebnisse nur noch mit Vorbehalt möglich ist, beträgt der Fehler für die einzusetzende Geschwindigkeitsrandbedingung in die Grenzschichtrechnung eine akzeptierbare Größenordnung.

An dieser Stelle muß auch darauf hingewiesen werden, daß die hier konsequent durchgeführte ebene Rechnung für sehr kleine Winkel $0^\circ < \theta \leq 5^\circ$ nur im Sinne der zugrundeliegenden Modellvorstellung durchgezogen werden kann.

Diese Vorgehensweise erscheint aber insofern vertretbar, da einerseits diese Daten nur als Zwischenergebnisse für die Variationsrechnung verstanden werden dürfen, und andererseits mit zunehmender Exzentrizität der Ellipsen auch das Ablösegebiet entsprechend kleiner wird und damit der Druckbeitrag $\int p \vec{n} dA$ für $\theta \rightarrow 0^\circ$ gegen Null geht. Es ist aber anzunehmen, daß im Experiment für den erwähnten kleinen Winkelbereich keine bzw. nur noch vereinzelt Ablöseerscheinungen auftreten werden.

6.3 Schlußfolgerungen und Perspektiven

Die insgesamt günstigen Ergebnisse belegen, daß die vorliegende Analyse offensichtlich die wesentlichen physikalischen Effekte der Stabgitterströmung erfaßt. Die (begründete) Vernachlässigung der turbulenten Beiträge in der Strömung außerhalb der Grenzschicht führt zu einem lösbaren mathematischen Formalismus, der mit vertretbarem Aufwand eine Vorausrechnung der Druck- und Geschwindigkeitsverhältnisse im Stabbündel erlaubt.

Insbesondere wird die in der Literatur noch wenig erforschte Schräganströmung über den vorgeschlagenen Variationsansatz theoretisch simulierbar, so daß die im Experiment beobachteten Phänomene über gedanklich "einfache" Modellvorstellungen quantifizierbar werden.

Damit läßt sich das "anisotrope Widerstandsverhalten" in semiempirischen Korrelationen, wie z. B. der von ZIEGLER /1/ vorgeschlagenen Matrix-Darstellung zusammenfassen, so daß über diese leicht handhabbaren Widerstandsfunktionen $\vec{R}$ ein Anschluß an die Quasi-Kontinuums-Theorie unmittelbar gegeben ist. Die Basisgleichungen 1.6 dieser Theorie sind dann vollständig vom Experiment entkoppelt - mit dem daraus resultierenden Vorteil -, daß selbst strömungsmechanisch komplizierte Probleme einer unabhängigen theoretischen Beschreibung zugänglich gemacht und lösbar geworden sind. /2,3/

Für die technische Praxis erscheint eine weitere Perspektive realisierbar bzw. verfolgungswürdig: Durch systematische Parametervariation der relevanten Größen - wie Längsteilung, Querteilung, Stabdurchmesser und Re-Zahl - könnten alle interessierenden Daten in Form von Tabellen oder entsprechenden Graphiken dem Ingenieur als Auslegungshilfe zur Verfügung gestellt werden. Der damit verbundene Aufwand wäre auf der Basis von Versuchsreihen aus zeitlichen und finanziellen Gründen praktisch undurchführbar. Der Vorschlag, über eine Rechnersimulation die Daten zu ermitteln, erscheint deshalb gerechtfertigt, da selbst in der neueren Literatur (VDI-Wärmeatlas 1984) noch erhebliche Unsicherheiten (± 35 % Fehlerband !) über das Widerstandsverhalten von senkrecht angeströmten Gitterverbänden bestehen. Für den Fall der Schräganströmung findet man - außer den am Lehrstuhl für Reaktortechnik selbst durchgeführten experimentellen Arbeiten /4 - 7/ - keine weiteren Angaben in der Literatur, die die auftretende Problematik detailliert beschreiben.

Zur endgültigen Beurteilung der vorliegenden Theorie müssen die Ergebnisse der zurzeit anlaufenden Testrechnungen /17/ abgewartet werden. Der Vergleich : Theorie $\longleftrightarrow$ Experiment für verschiedene Versuchsreihen wird letztlich darüber Aufschluß geben, wo die Gültigkeitsgrenzen des vorliegenden Programmsystems tatsächlich einzuordnen sind.

Anhang

- Widerstandsbeiwerte ξ_{90} und ξ_0
Vergleich : Theorie $\leftrightarrow$ Experiment
(Tab. 6.1 und 6.2)

- Graphische Zusammenfassung der wichtigsten
Ergebnisse im schrägangeströmten Stabbündel
(Bild 6.1 bis 6.8)

- Bilder- und Tabellenverzeichnis

- Literaturreferenzen

Tab. 6.1

WIDERSTANDSBEIWERTE IM SENKRECHT ANGESTRÖMTEN FALL ($\theta = 90^\circ$)
 VERGLEICH : THEORIE $\longleftrightarrow$ EXPERIMENTELLE DATEN

Autor	$Re_u = \frac{u \cdot D}{\nu}$ (-)	Re_i (-)	$\left \frac{\overline{v_p}}{\rho/2 \cdot u^2} \right = \zeta_{90}$ (1/m)	Mittelwert		rel. Abweichung $\frac{ \zeta_{Ex} - \zeta_{Theorie} }{\zeta_{Ex}}$
				$\zeta_{Ex} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \zeta_{i,90}$	(1/m)	
Brandt Idel'chick Hollenhorst VDI-Wärmeatlas 1984 VDI-Wärmeatlas 1974 Basler	50.000	23.975 98.897 50.000 98.897 69.294 50.000	40.5 35.2 41.6 50.6 36.0 43.8	40.8		7.4 %
Brandt Idel'chick Hollenhorst VDI-Wärmeatlas 1984 VDI-Wärmeatlas 1974 Basler	75.000	35.963 148.327 75.000 148.327 94.941 75.000	36.1 37.6 45.6 33.4 40.7	38.2		6.1 %
Brandt Idel'chick Hollenhorst VDI-Wärmeatlas 1984 VDI-Wärmeatlas 1974 Basler	100.000	47.950 197.769 100.000 197.769 126.588 100.000	33.3 - 35.0 42.4 31.7 36.8	35.6		3.4 %
Brandt Idel'chick Hollenhorst VDI-Wärmeatlas 1984 VDI-Wärmeatlas 1974 Basler	125.000	59.937 247.242 125.000 247.242 158.235 125.000	31.3 - 33.1 40.1 30.4 33.5	33.7		0.6 %

Autor	Gültigkeitsbereich (Geometrie)	Gültigkeitsbereich Re_i	Vertrauensbereich Fehlerband	Quelle
Brandt	$1.1 \leq a \leq 4$ $0.5 \leq b \leq 4$	$5 \cdot 10^3 < Re_\infty < 8 \cdot 10^4$ $Re_\infty = \frac{w_\infty D}{\nu}$	keine Angabe	/ 46 /
Idel'chick	$S_1/D < 2$ $0.14 \leq \frac{S_1-D}{S_2-D} < 1.7$ hier: $S_2 \equiv S_1$	$3 \cdot 10^3 \leq Re_{max} \leq 1 \cdot 10^5$ $Re_{max} = \frac{w_{max} D}{\nu}$	keine Angabe	/ 43 /
Hollenhorst	$a = S_1/D = 1.320$ $b = S_2/D = 1.143$ (60° - Geometrie)	Meßbereich: $5 \cdot 10^4 \leq Re_u \leq 1.25 \cdot 10^5$ $Re_u = \frac{u D}{\nu}$	Gesamtfehler: $\pm 23 \%$	/ 5 /
V D I Wärmeatlas 1984	$1.25 \leq a \leq 3.0$ $0.6 \leq b \leq 3.0$	$1 \cdot 10^3 \leq Re_{max} \leq 3 \cdot 10^5$	$\pm 35 \%$; $p_j = 97 \%$; $j = 1$ / 44 / $\pm 25 \%$; $p_j = 90 \%$; $j = 2$ wenn p_j -% aller Meßwerte durch die empirische Korrelation er- faßt werden soll	/ 44 /
V D I Wärmeatlas 1974	$1.25 \leq a \leq 3.0$ $1.0 \leq b \leq 3.0$	$Re_m \leq 3 \cdot 10^5$ $Re_m = \frac{w_m d'}{\nu}$	$\pm 35 \%$	/ 45 /
Basler	$a = S_1/D = 1.320$ $b = S_2/D = 1.143$	Grenzschichttheorie laminar/turbulent	---	

Tab. 6.2

WIDERSTANDSBEIWERTE FÜR TURBULENTE STRÖMUNGEN BEI HYDRAULISCH GLATTEN OBERFLÄCHEN ($\theta = 0^\circ$)

Autor		$Re = \frac{u \cdot D}{\nu}$	$Re_{hyd} = \frac{u \cdot d_{hyd}}{\nu}$	$\lambda \cdot 10^{-2} \quad (-)$	$\xi_O \quad (1/m)$
Blasius Hermann Nikuradse Basler		50.000	46.063	2.1597 2.1217 —	1.172 1.152 —
					~ 1.15
Blasius Hermann Nikuradse Basler		75.000	69.095	1.9515 1.9406 —	1.059 1.053 —
					~ 1.05
Blasius Hermann Nikuradse Basler		100.000	92.126	1.8161 1.8248 (1.7917)	0.985 0.990 (0.972)
					~ 0.98
Blasius Hermann Nikuradse Basler		125.000	115.160	(1.7175) 1.7416 1.7159	(0.932) 0.945 0.931
					~ 0.95
Autor	empirische Formel		Gültigkeitsbereich		Quelle
Blasius	$\lambda = 0.3164 \cdot Re_{hyd}^{-0.25}$		$3 \cdot 10^4 \leq Re_{hydr} \leq 1 \cdot 10^5$		/ 52 /
Hermann	$\lambda = 0.0054 + 0.3964 \cdot Re_{hydr}^{-0.3}$		$2 \cdot 10^4 \leq Re_{hydr} \leq 2 \cdot 10^6$		/ 48 /
Nikuradse	$\lambda = 0.0032 + 0.221 \cdot Re_{hydr}^{-0.237}$		$Re_{hydr} \geq 1 \cdot 10^5$		/ 53 /
Basler	Theorie extrapoliert (vgl. Bild 6.2)		laminar/turbulente Grenzschichttheorie		

$$\vartheta = 90^\circ$$

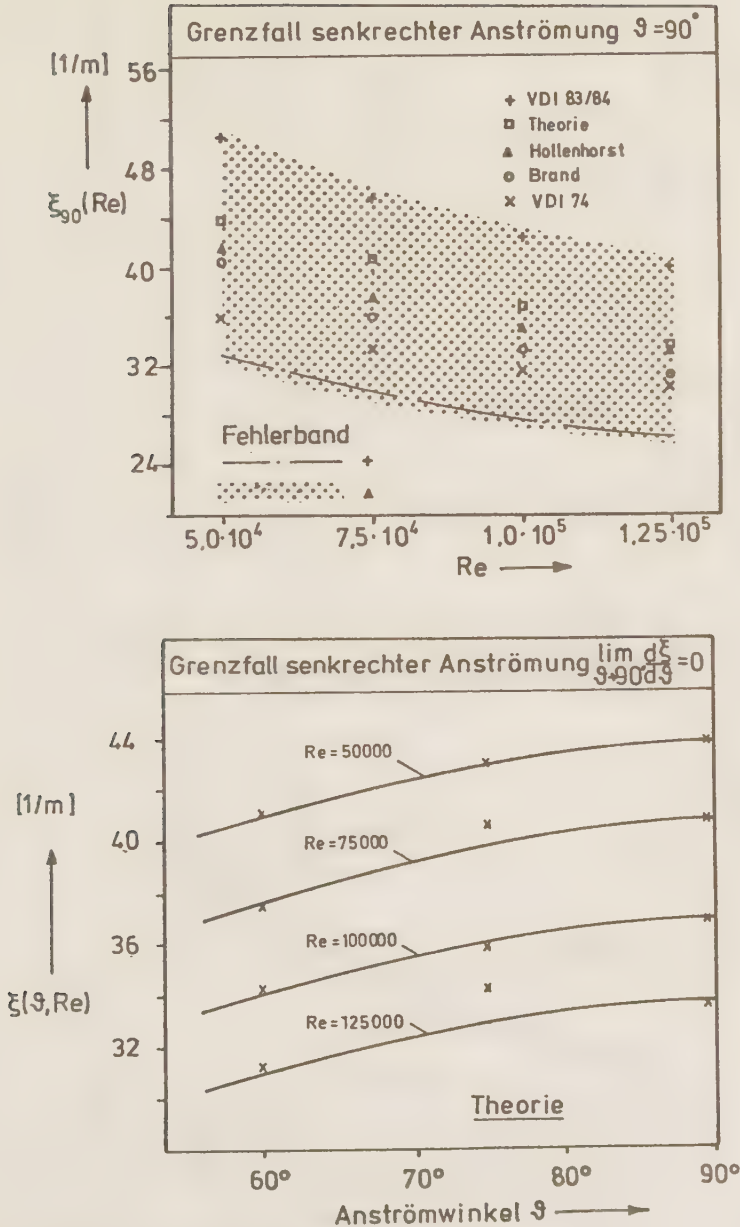


Bild 6.1 Widerstandsbeiwerte $\xi_{90}(Re)$
im senkrecht angeströmten Stabbündel ($\theta = 90^\circ$)
Vergleich : Theorie $\longleftrightarrow$ Experiment

$$\vartheta = 0^\circ$$

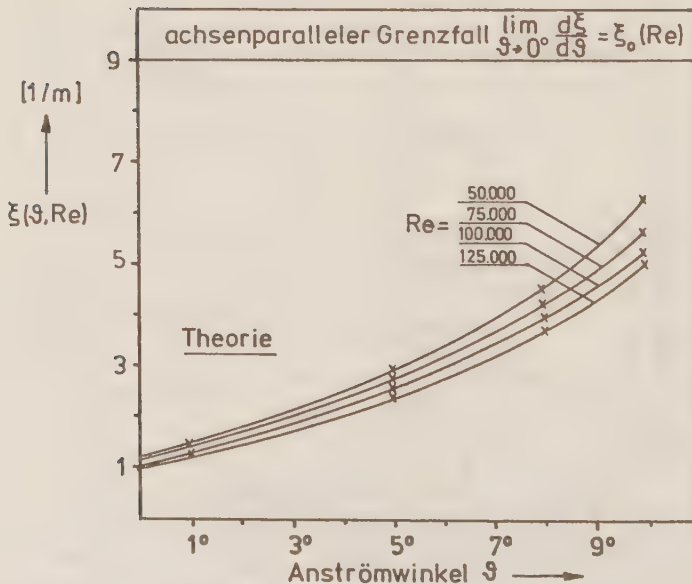
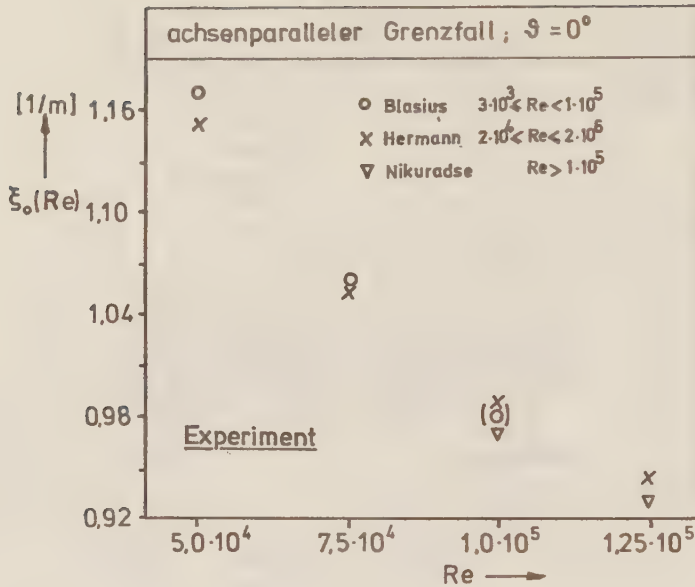


Bild 6.2

Widerstandsbeiwerte $\xi_0(Re)$

im längsangeströmten Stabgebündel ($\theta = 0^\circ$)

Vergleich : Theorie ↔ Experiment

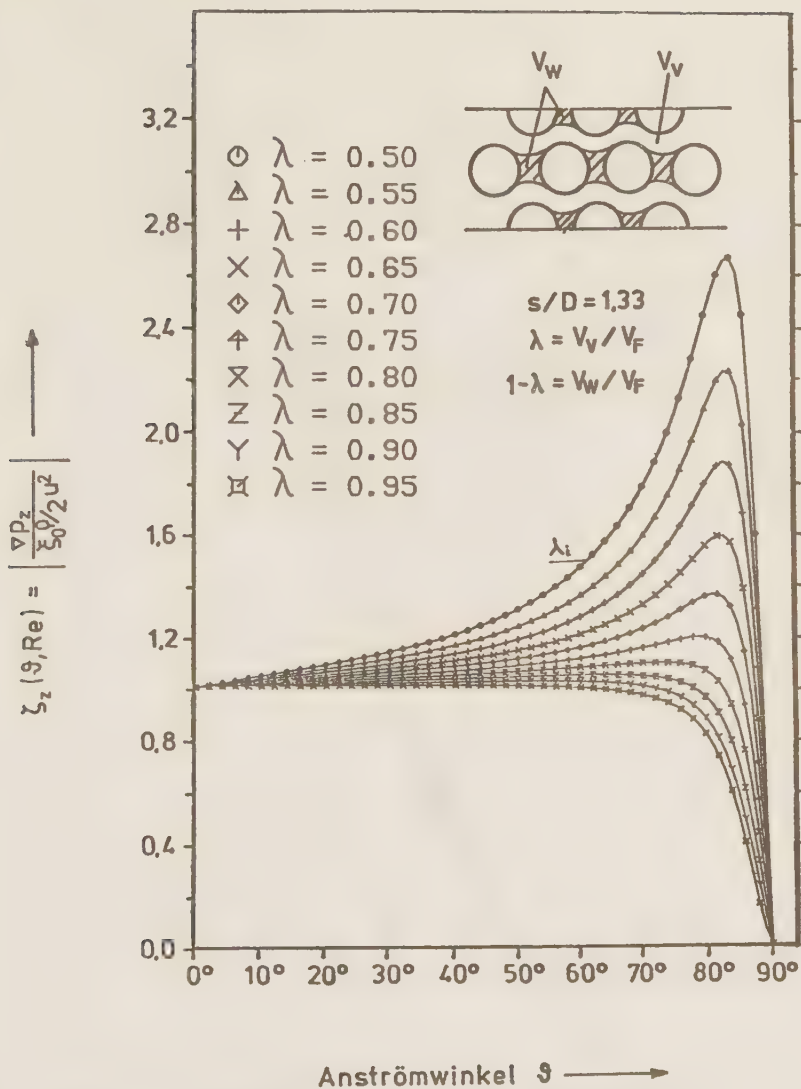


Bild 6.3 Dimensionsloser, axialer Druckabfall in Abhängigkeit vom Ablöseverhalten für verschiedene Stabgitteranordnungen (Normierungskonstante ξ_0)

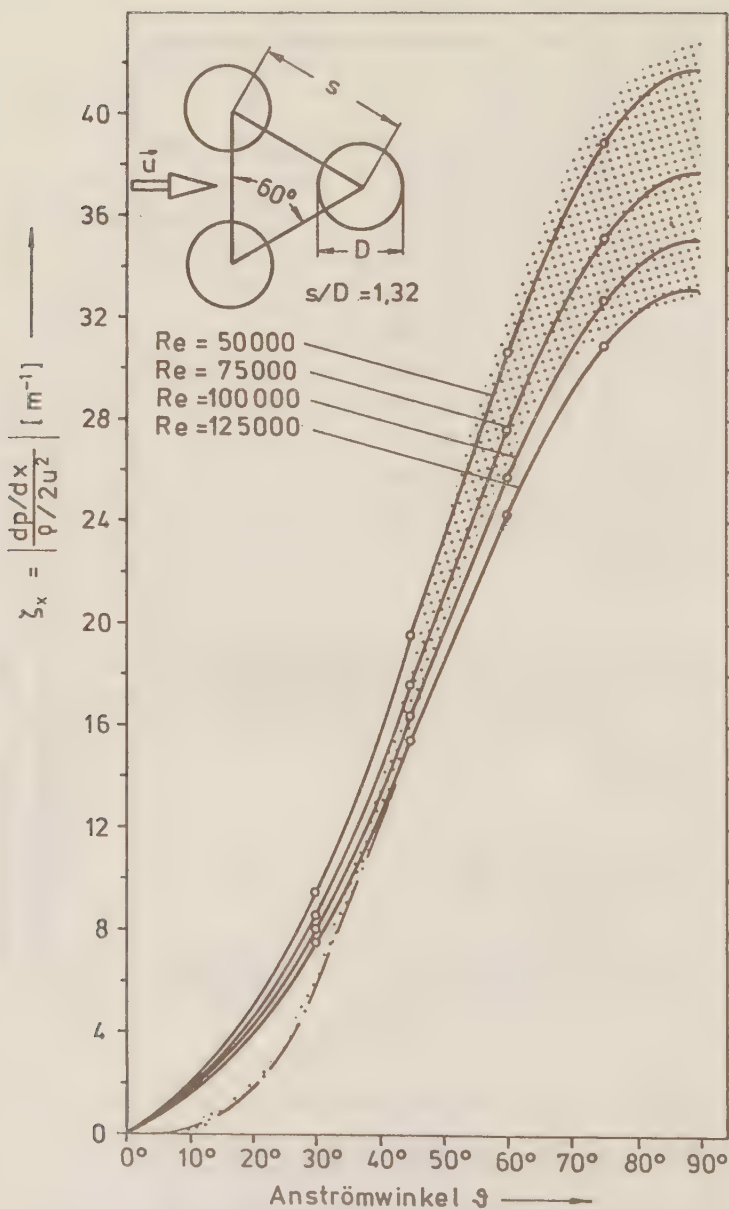


Bild 6.4 a) Druckabfall in radialer Richtung
Auswertung der Versuchsreihen nach HOLLENHORST /5/

— Experiment (Matrixdarstellung nach Gl.5.52)
(Meßwerte bei $\theta = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$)

..... Theorie (gerechnete Stützwerke, vgl. Bild 6.4 b))

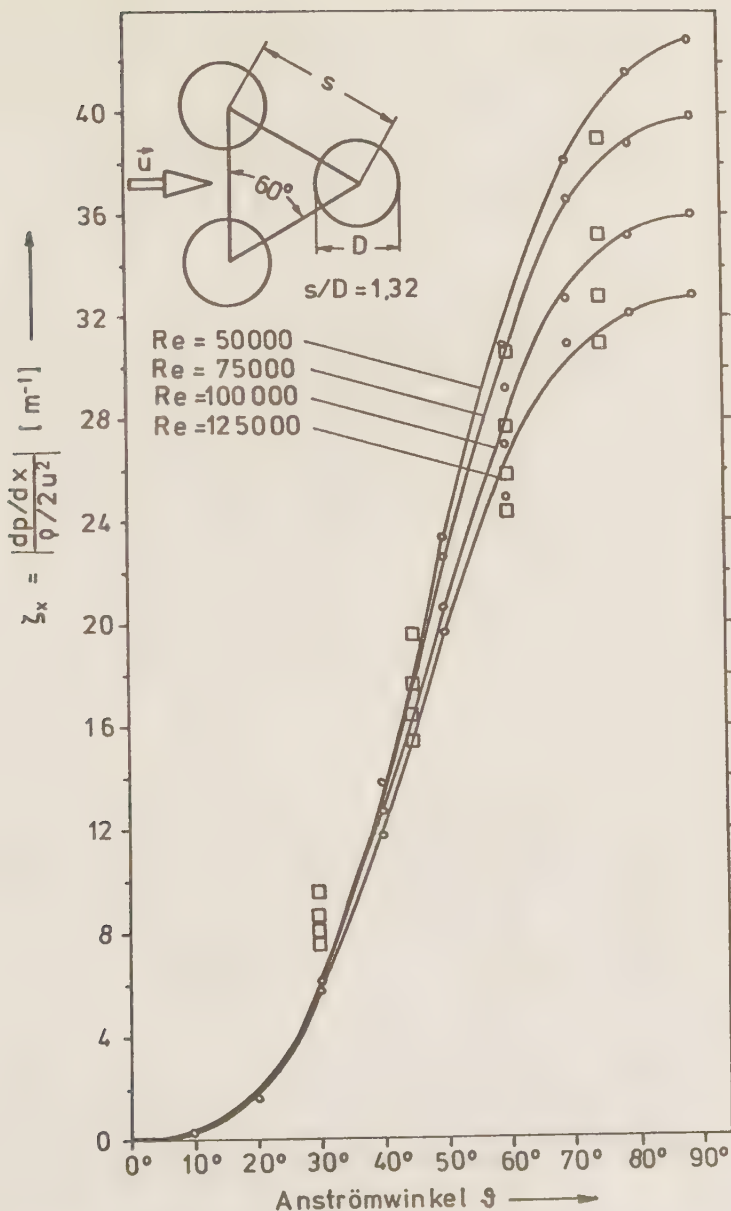
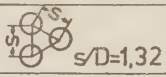


Bild 6.4 b)

Druckabfall in radialer Richtung
Auswertung der Variationsrechnung

□ Meßpunkte : θ_i , Re_j , vgl. Bild 6.4 a)

○ Theorie : $\theta = 89^\circ, 75^\circ, 60^\circ, 45^\circ, 30^\circ, 25^\circ, 20^\circ, 15^\circ, 10^\circ, 7,5^\circ, 5^\circ, 1^\circ$

Geometrie		Anströmwinkel / grad p				
	ϑ	15°	30°	45°	60°	75°
—Theorie	α	14,8°	51,5°	42,8°	29,3°	14,8°
• Experiment	α	—	56°	41°	26°	10°

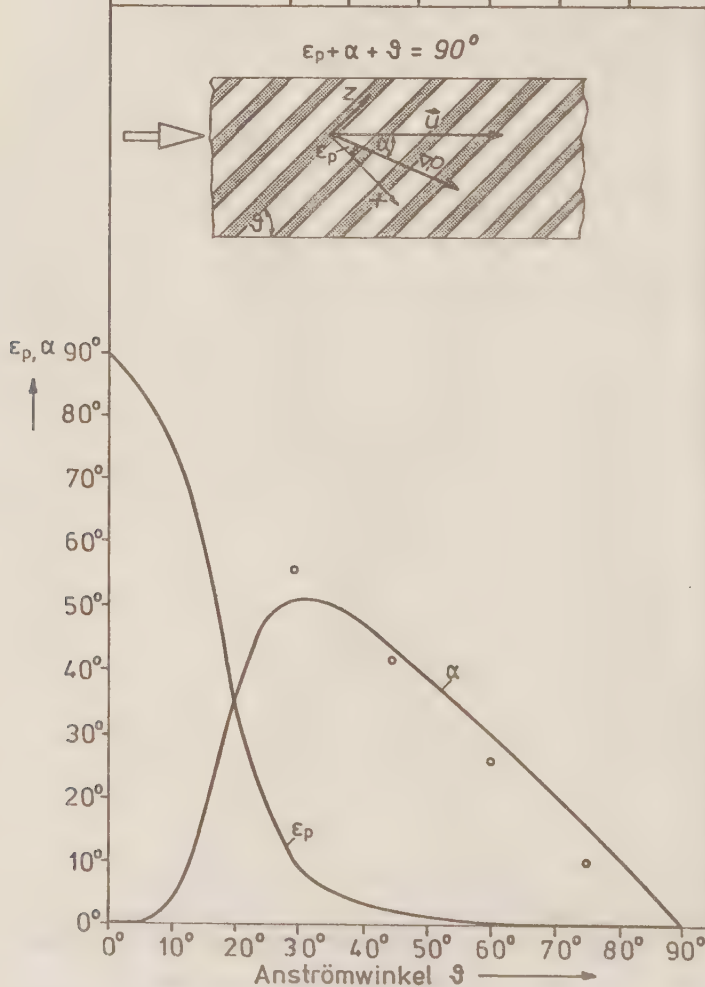


Bild 6.5

Richtung des resultierenden Druckgradienten
im schräggeströmten Stabgitter

Vergleich : Theorie $\longleftrightarrow$ Experiment

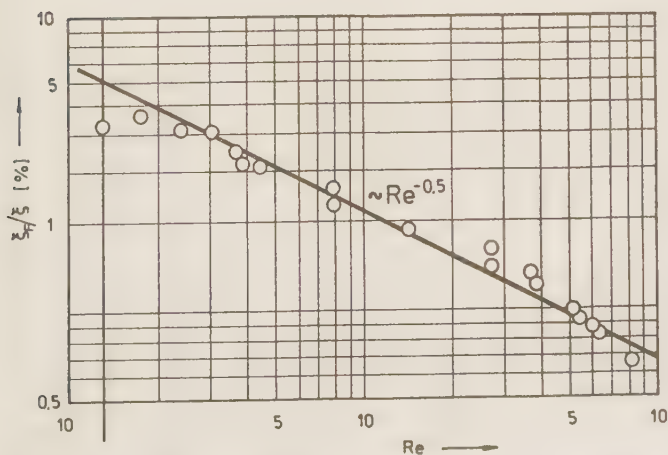
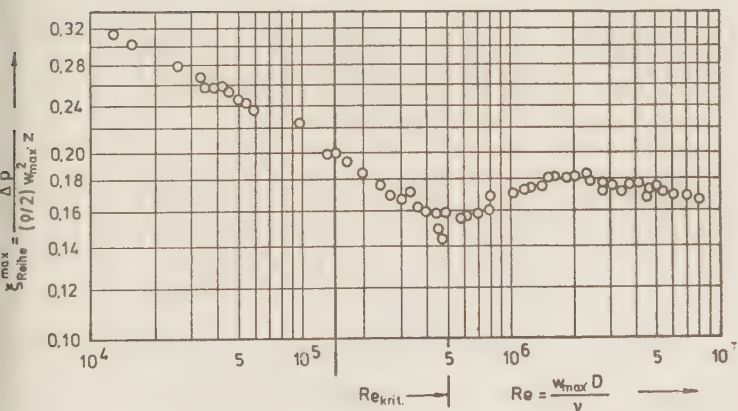
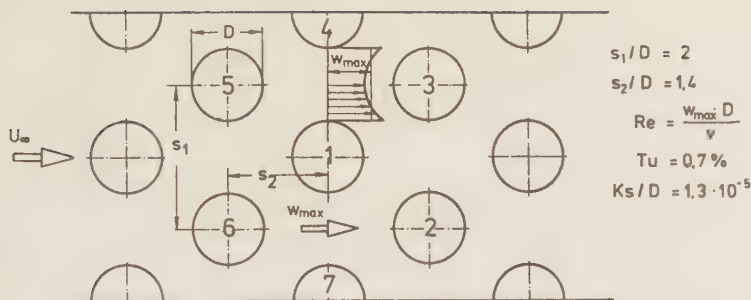


Bild 6.6 Widerstandsbeiwerte im senkrecht angeströmten Stabbündel
 Auswertung der Druck- und Schubspannungsbeiträge nach
 Versuchsreihen von ACHENBACH / 42/ (vgl. Bild 6.7)

VOLUMENPOROSITÄT $\gamma = 0.720$ (-)

QUERTEILUNG $S_1 = 40.000 \text{ (MM)}$

QUARTTEILUNG
S₁ = 70.000 (MM)
S₂ = 20.000 (MM)
S₃ = 20.000 (MM)

EXAMSTELLE	28.000 (MM)	20.000 (MM)
STABNURCHMESSER	28.000 (MM)	20.000 (MM)

GITTERKENNZAHL A X B = 2.000 x 1.400

$$\Lambda = S_1/D$$
$$\varepsilon = s_2^2 / \sigma$$

GESCHWINDIGKEIT IM ENGSTEN QUERSCHNITT $v_{\text{max}} = 6,476 \text{ (M/S)}$

GESCHWINDIGKEIT IM ENGSTEN QUERSCHNITT $v_{\text{MAX}} = 6.476 \text{ (M/S)}$

MASSENTRANSPORTGESCHWINDIGKEIT
U = 4.500 (M/S)

BEZUGSGESCHWINDIGKEIT $U_{REF} = 4.352 \text{ (M/S)}$

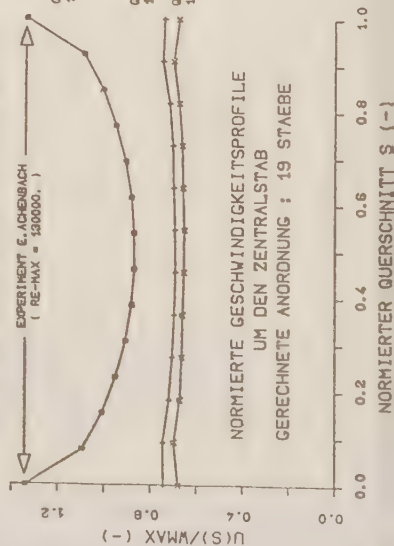
ANSTROMWINKEL

(GRAD)

89.0

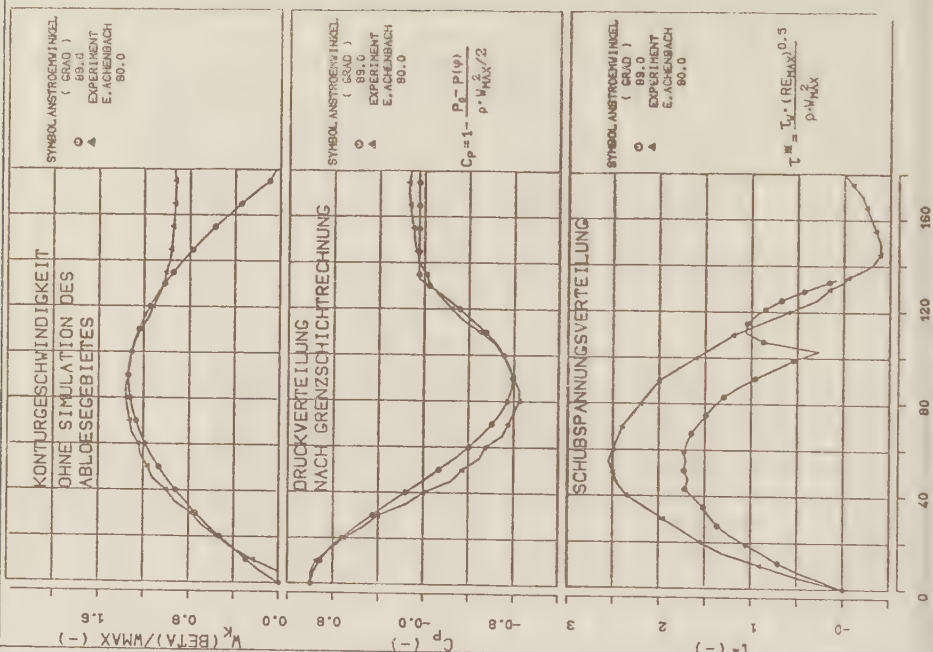
五

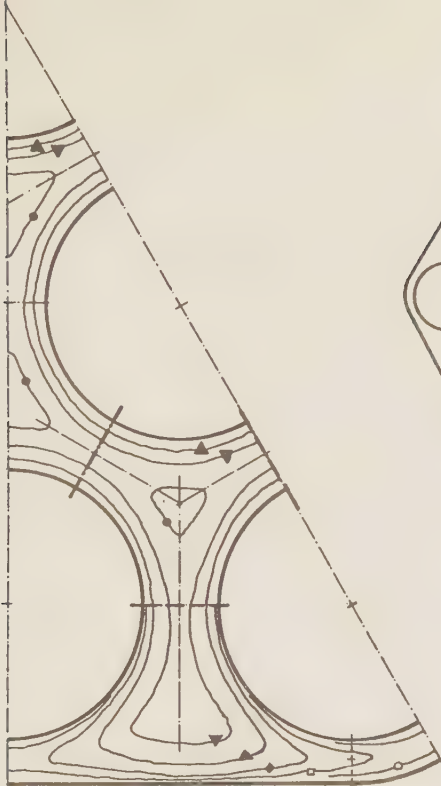
⑤



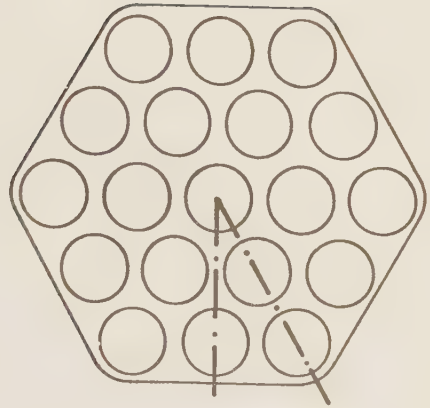
NORMIERTE GESCHWINDIGKEITSPROFILE
UM DEN ZENTRALSTAB
GERECHNETE ANORDNUNG : 19 STAEBE

NORMIERTER QUERSCHNITT S (-)





$Re = 60.000$



Isotachen $\frac{v}{V} = 1,2 \cdot$
 $1,1 \blacktriangledown$
 $1,0 \blacktriangle$
 $0,9 \blacklozenge$
 $0,8 \square$
 $0,7 \circ$

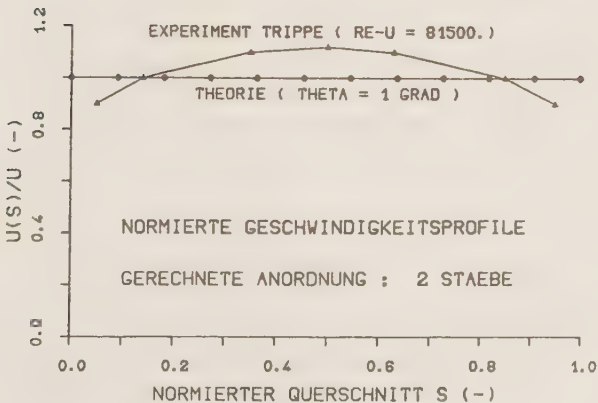
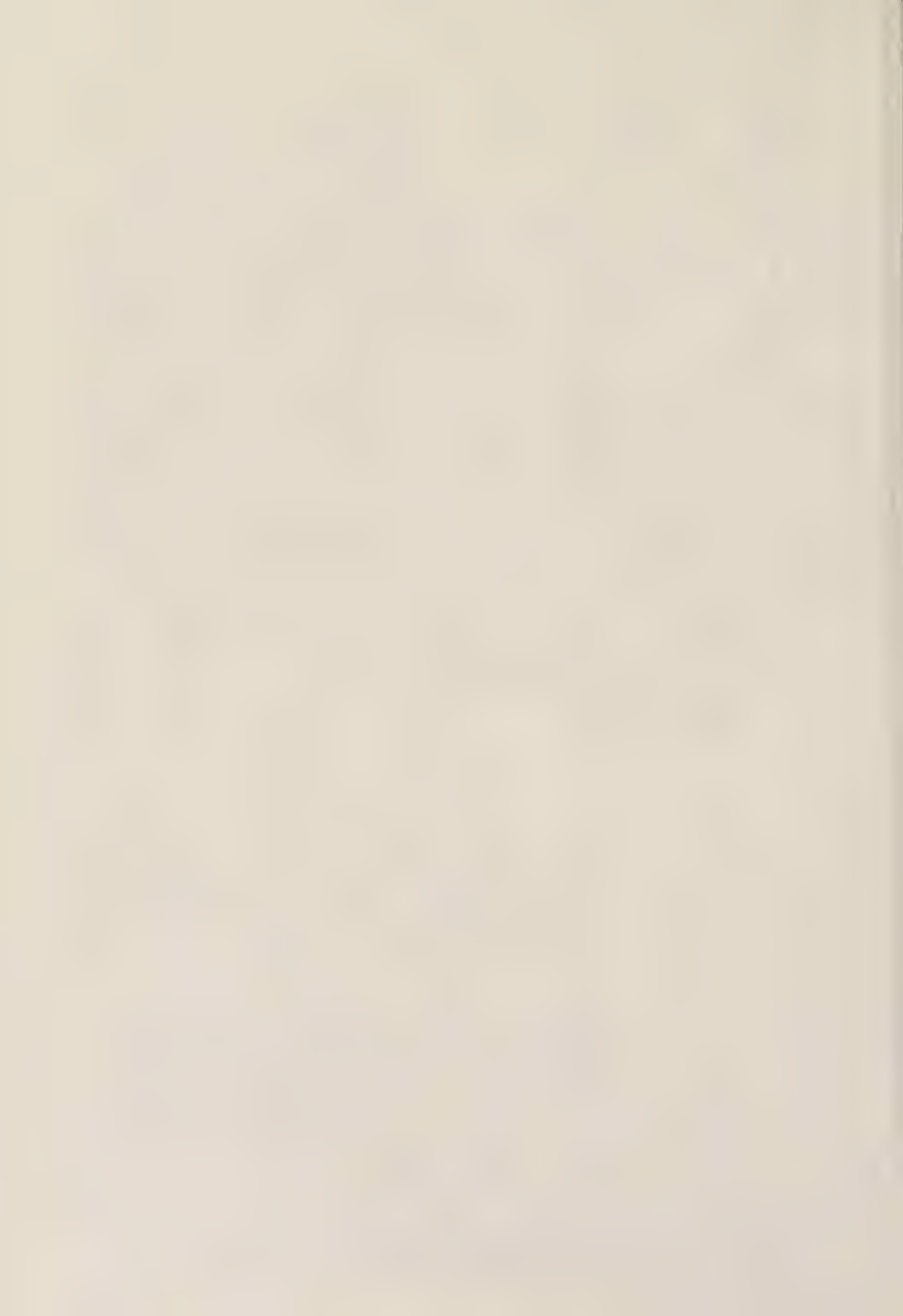


Bild 6.8

Geschwindigkeitsverteilung
im längsangeströmten Stabbündel nach TRIPPE / 47 /



Bilderverzeichnis

Seite

Bild 1.1	Prinzipskizze des "offenen" Kernkonzeptes mit 3-dimensionaler Leistungsdichteverteilung $Q(r,z)$	2
Bild 1.2	Kontrollraum im Stabgitter	3
Bild 2.1	Ablösewinkel in Abhängigkeit von der Re-Zahl und dem Längsteilungsverhältnis $b = s_2/D$ im senkrecht angeströmten Stabgitter (Querteilung $a = s_1/D = \text{const} = 1.86$) Quelle /18/	13
Bild 2.2 a)	Lage des Staupunktes im senkrecht angeströmten Stabbündel Quelle /29/	14
Bild 2.2 b)	Grenzschichtumschlag laminar/turbulent Quelle /29/	15
Bild 2.2 c)	Beginn der vollturbulenten Grenzschicht Quelle /29/	15
Bild 2.2 d)	Ablösewinkel im senkrecht angeströmten Stabbündel Quelle /29/	16
Bild 2.3	Geometrie- und Re-abhängiges Grenzschichtverhalten im senkrecht angeströmten Stabgitter (hier : $Re_{\max} = \frac{w_{\max} D}{\nu} = 4 \cdot 10^5$ nach /29/)	18
Bild 2.4	Definition der Verdrängungsdicke δ_1 (Fläche A = Fläche B) $\delta_1 = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy$	20
Bild 2.5	Klassifizierung von turbulenten Geschwindigkeits- profilen in der Grenzschicht ($Re = Re_{\delta_2}$)	21

Bild 2.6	Funktionale Abhängigkeit der transformierten Größen a, b, α , β , sowie der Funktion H_{12} und H_{32} vom modifizierten Geschwindigkeitsformparameter H für laminar und turbulente Grenzschichten $y_1 = f(H)$	29
Bild 2.7	Absolute Differenz Δ der Gradienten für die Konturgeschwindigkeit $\Delta = \left. \frac{dU}{dx} \right _{\text{Numerik}} - \left. \frac{dU}{dx} \right _{\text{analyt. Lösung}} = A_{\text{Spline}} - A_{\text{analytisch}}$	37
Bild 2.8	Testrechnungen am Einzelzylinder Zusammenfassende Ergebnisse der laminar/turbulenten Grenzschichtrechnung nach dem Energieverfahren (Integralmethode)	39
Bild 3.1	Modellierung des schrägangeströmten Stabgitters durch entsprechend umströmte Ellipsenprofile (ebene Zwischenrechnung)	45
Bild 3.2	Geometrie der ebenen Schnittprofile ($\theta = \text{const}$)	47
Bild 3.3	Lösung des komplexen Potentials $\Omega(z) = \phi + i \psi$ Orthogonalitätsnachweis $\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}$ bzw. $\frac{\partial \phi}{\partial \eta} = - \frac{\partial \psi}{\partial \xi}$	53
Bild 3.4	Ebenes Vektorfeld $\vec{w}(\xi, \eta)$ der Geschwindigkeits- verteilung ($\Gamma=0$) (Periodizitätsnachweis zur Simulation einer "unendlichen" Stabgitter-Anordnung)	55
Bild 3.5	Modellierung des Ablösegebietes durch Potentialwirbelpaare $\Gamma_w \neq 0$	58
Bild 3.6	Stromlinienverlauf $\psi = \text{const}$ in der vollständig versetzten Anordnung (hier: Azimutalwinkel $\phi = 30^\circ$) a) $\Gamma_w = 0$; b) $\Gamma_w \neq 0$	61

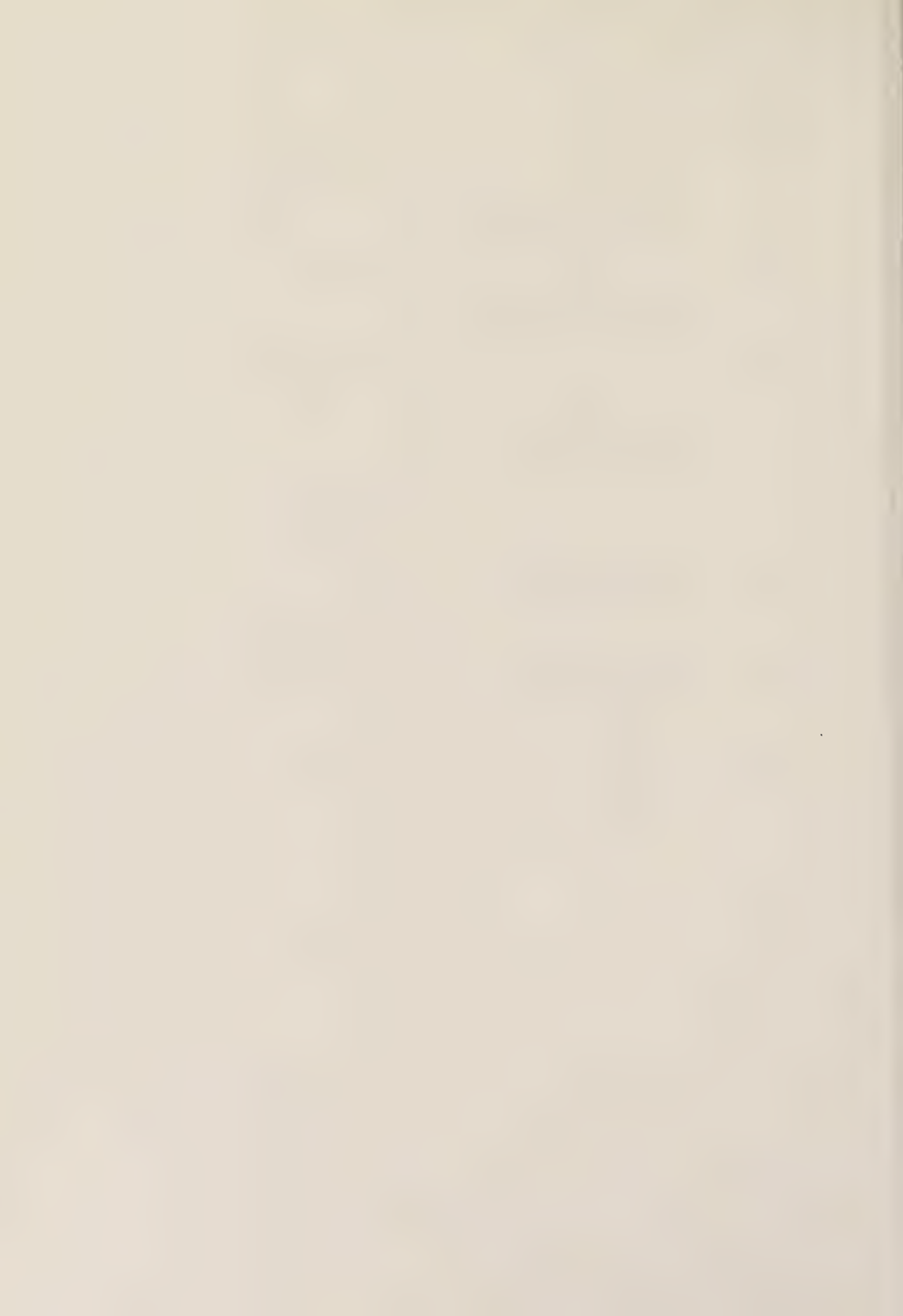
Bild 3.7	Stromlinienverlauf $\Psi = \text{const}$ in der fluchtend versetzten Anordnung (hier: Azimutalwinkel $\phi = 0^\circ$)	62
Bild 4.1	Kontrollraum im Stabbündel zur Auswertung der Einzelbeiträge des Impulsintegrals	65
Bild 4.2	Geometrieverhältnisse bei Drehung des Kontrollraumes K zur Auswertung des Oberflächenintegrals $\int_0 \sigma_{ij} \vec{n}_j dA$ über die Struktur Oberfläche O	73
Bild 4.3	Geometrische Zusammenhänge für die Auswertung des Wegintegrals $\int_L \sigma_{ij} n_j \cos \gamma_z ds$	76
Bild 4.4	Zusammenfassende Ergebnisse der ebenen Rechnung $C_D, C_f, C_w = f(\theta, Re)$	
a)	Re = 50.000	80
b)	Re = 75.000	81
c)	Re = 100.000	82
d)	Re = 125.000	83
Bild 4.5	Druckwiderstand C_D in Abhängigkeit vom Anströmwinkel θ (ebene Rechnung)	84
Bild 4.6	Reynoldsabhängigkeit der Druckwiderstandsbeiwerte C_D (ebene Rechnung)	85
Bild 4.7	Reibungsbeiwerte C_f in Abhängigkeit vom Anströmwinkel θ (ebene Rechnung)	86
Bild 4.8	Definition der Bezugsgeschwindigkeiten über die geometrischen Gitterkenngrößen (Querteilungsverhältnis a ; Längsteilungsverhältnis b)	89
Bild 4.9	Widerstandsbeiwerte $\xi(\theta, Re)$ (ebene Rechnung)	91

Bild 5.1	Vektorielle Darstellung der Druck- und (integralen) Geschwindigkeitsgrößen im Stabgitter	96
Bild 5.2	Schematische Verdeutlichung der Variationsrechnung (Entscheidungskriterium zur Bestimmung der mittleren Richtung der freien Strömung über den Winkel $\epsilon_{v_{\min}}$)	98
Bild 5.3	Druckabfall in axialer Richtung	101
a)	Dreiecksanordnung : Messung HOLLENHORST /5/	
b)	Quadratische Anordnung : Messung BÖTTGENBACH /6/ Meßpunkte $\theta = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$	
Bild 5.4	Geschwindigkeitsrandbedingung im idealisierten Ablösegebiet	103
Bild 5.5	Modellierung des Ablösegebietes	106
Bild 5.6	Parametrisierte Darstellung des Widerstandsverhaltens für idealisierte, drehungsbehaftete Wirbel	108
Bild 5.7	Geometrie- und winkelabhängiger Druckabfall im Ablösegebiet	111
Bild 5.8	Ablöseverhalten einer versetzt fluchtenden Dreiecksanordnung (L-2-F Messung von FLÜGGE /4/)	112
Bild 6.1	Widerstandsbeiwerte $\xi_{90}(\text{Re})$ im senkrecht angeströmten Stabbündel ($\theta = 90^\circ$) Vergleich : Theorie $\longleftrightarrow$ Experiment	Anhang
Bild 6.2	Widerstandsbeiwerte $\xi_0(\text{Re})$ im längsangeströmten Stabbündel ($\theta = 0^\circ$) Vergleich : Theorie $\longleftrightarrow$ Experiment	
Bild 6.3	Dimensionsloser, axialer Druckabfall in Abhängigkeit vom Ablöseverhalten für verschiedene Stabgitteranordnungen (Normierungskonstante ξ_0)	

- Bild 6.4 a) Druckabfall in radialer Richtung
Auswertung der Versuchsreihen von HOLLENHORST /5/
- b) Druckabfall in radialer Richtung
Auswertung der Variationsrechnung
- Bild 6.5 Richtung des resultierenden Druckgradienten
im schrägangeströmten Stabgitter
Vergleich : Theorie $\longleftrightarrow$ Experiment
- Bild 6.6 Widerstandsbeiwerte im senkrecht angeströmten
Stabbündel
Auswertung der Druck- und Schubspannungsbeiträge
nach Versuchsreihen von ACHENBACH /42/
- Bild 6.7 Einzelheiten in der senkrecht angeströmten
Stabgitterzelle
(Druck-, Schubspannungs- und Geschwindigkeits-
verteilung am Zentralstab)
- Bild 6.8 Geschwindigkeitsverteilung im längsangeströmten
Stabbündel nach TRIPPE /47/



Tabellenverzeichnis	Seite
Tab. 2.1 Werte der laminar/turbulenten Grenschichtfunktionen	30
Tab. 2.2 Geschwindigkeitsverteilung der ebenen Staupunktlösung	34
Tab. 3.1 Analytische Beschreibung der Grundströmungen	44
Tab. 4.1 Widerstandsbeiwerte $\xi(\theta, Re)$ (ebene Rechnung)	90
Tab. 5.1 Grenzwertverhalten des Variationsmodells	99
Tab. 5.2 Empirisch korrelierte Konstanten nach HOLLENHORST /5/	117
Tab. 6.1 Widerstandsbeiwerte im senkrecht angeströmten Stabbündel ($\theta = 90^\circ$) Vergleich : Theorie $\longleftrightarrow$ Experiment	Anhang
Tab. 6.2 Widerstandsbeiwerte im längsangeströmten Stabbündel ($\theta = 0^\circ$) Vergleich : Theorie $\longleftrightarrow$ Experiment	



Literaturverzeichnis

- / 1/ Ziegler, A.
Strömungsfeld in Reaktoren mit offenen Brennelementen
Atomkernenergie 27, 1976, S. 120 - 124

- / 2/ Ziegler, A.
Ein neues Konzept für den natriumgeköhlten Schnellen Brüter
Brennstoff-Wärme-Kraft 35, 1983, S. 50 - 55

- / 3/ Bente, H.
Thermohydraulische Analyse eines neuen Schnellen Brüter Kerns
mit offenen Brennelementen im Hinblick auf das Störfallverhalten
Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 1983

- / 4/ Flügge, H.
Entwicklung und Anwendung eines Lases-Zwei-Fokus-Meßverfahrens
zur Untersuchung von Strömungsgeschwindigkeiten in engen Stabgittern
Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 1982

- / 5/ Hollenhorst, D.
Experimentelle Bestimmung und Darstellung des Widerstandstensors
für Strömungen durch enge Stabgitter
Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 1983

- / 6/ Böttgenbach, H.
Messungen von Strömungsfeldern in engen Stabbündeln zur Überprüfung
einer anisotropen Strömungsfeldtheorie
Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 1977

- / 7/ Winter, J.
Experimentelle Ermittlung von Stromlinien in einem engen Brennstabgitter
mit Schikanen zur Überprüfung einer anisotropen Widerstandshypothese
Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 1978

- / 8/ Ioer, W.
Untersuchung eines Schnellen Brüter Kerns mit kastenlosen Elementen
anhand einer neutronen-physikalischen Kernausslegungsrechnung und einer
vergleichenden Bewertung der resultierenden Eigenschaften
Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 1983

- / 9/ Betz, A.
 Konforme Abbildungen
 Springer-Verlag Berlin/Göttingen/Heidelberg 1974, 2. Auflage

- /10/ Jahnke - Emde - Lösch
 Tables of Higher Functions - Tafeln höherer Funktionen
 B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Stuttgart, 1966, 7. Auflage

- /11/ Bronstein, I. N. - Semendjajew, K. A.
 Taschenbuch der Mathematik
 Verlag Harri Deutsch Zürich und Frankfurt/M., 1971, 12. Auflage

- /12/ Gersten, Kl.
 Einführung in die Strömungsmechanik
 Bertelsmann Universitätsverlag, Mai 1974

- /13/ Joppich, B.
 Berechnung, Auswertung und graphische Darstellung des komplexen
 Potentials für eine unter verschiedenen Winkeln angeströmte
 periodische Stabgitteranordnung
 Diplomarbeit, Ruhr-Universität Bochum, Lehrstuhl für Reaktortechnik,
 Mai 1982

- /14/ Chao, B. T. - Sha, W. T.
 Conservation Equations for Finite Control Volume Containing
 Single-Phase Fluid with Fixed, Dispersed Heat-Generating Solids
 NUREG/CR-0945, July 1979

- /15/ Chao, B. T. - Sha, W. T.
 Local Volume-Averaged Transport Equations for Single-Phase Flow in
 Regions Containing Fixed Dispersed Heat-Generating Solids
 NUREG/CR-1969, April 1981

- /16/ Fenech, H.
 Heat Transfer and Fluid Flow in Nuclear Systems
 Verlag Pergamon Press, New York, 1981

- /17/ Cygan, P.
 Überprüfung eines Programmsystems zur Analyse einer Stabgitterströmung
 auf der Basis von experimentell gefundenen Daten
 Studienarbeit, Ruhr-Universität Bochum, Lehrstuhl für Reaktortechnik

- /18/ Heinecke, E.
Strömungstechnische und aeroakustische Erscheinungen in Zylindergittern
D 83 (Diss. T.U. Berlin)

- /19/ Zdravkovich, M. M.
Flow structure within both stationary and vibrating tube banks with
triangular pitch
Keswick, U.K., May 1978

- /20/ Zhukauskas, A. A. - Katinas, V. I. - Perednis, E. E. - Sobolev, V. A.
Flow of a viscous liquid through inclined corridor bundles of tubes
with flow-excited vibrations
International Chemical Engineering, Vol. 21, No. 3, July 1981

- /21/ Groehn, H. G. - Scholz, F.
Wärme- und Strömungstechnische Untersuchungen an fluchtenden
Rohrbündel-Wärmeaustauschern aus pyramidenförmig aufgerauhten Rohren
Kernforschungsanlage Jülich GmbH, IRB, JÜL-1437, Juli 1977

- /22/ Achenbach, E.
On the Cross Flow through In-Line Tube Banks with Regard to the
Effect of Surface Roughness
Wärme- und Stoffübertragung, Bd. 4 (1971), S. 152-155, Springer-Verlag 1971

- /23/ Morsy, M. G.
Skin Friction and Form Pressure Loss in Tube Bank Condensers
Heat and Fluid Flow (IMechE) 1976, Vol. 6, No. 1 / 1976

- /24/ Aly, S. - Cunningham, J.
Effect of Mass Transfer on Flow Across a Staggered Tube Bundle
Int. J. Heat & Fluid Flow, Vol. 1, No. 4, 1979

- /25/ Achenbach, E.
Influence of Surface Roughness on the Flow through a Staggered Tube Bank
Wärme- und Stoffübertragung, Bd. 4 (1971), S. 120-126, Springer-Verlag 1971

- /26/ Gaddis, E. S. - Gnielinski, V.
Druckverlust in querdurchströmten Rohrbündeln
Verfahrenstechnik 17 (1983), Nr. 7

- /27/ Hammeke, K. - Heinecke, E. - Scholz, F.
Wärmeübergangs- und Druckverlustmessungen an querangeströmten
Glattrohrbündeln, insbesondere bei hohen Reynoldszahlen
J. Heat Mass Transfer, Vol. 10, pp. 427-446, Pergamon Press Ltd. 1967

- /28/ Niggeschmidt, W.
Druckverlust und Wärmeübergang bei fluchtenden, versetzten und
teilversetzten querangeströmten Rohrbündeln
Dissertation, D 17, Darmstadt 1975

- /29/ Zhukauskas, A. A. - Ulinskas, R. V.
Analysis of lateral streamline flow of water through tube bundles
during the process of heat transfer at critical Reynolds numbers
International Chemical Engineering (Vol. 17, No. 4)

- /30/ Truckenbrodt, E.
Strömungsmechanik
Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 1968, Titel-Nr. 1487

- /31/ Rotta, J. C.
Vergleichende Berechnungen von turbulenten Grenzschichten mit
verschiedenen Dissipationsgesetzen
Ing.-Arch. 38 (1969), S. 212-222

- /32/ Walz, A.
Strömungs- und Temperaturgrenzschichten
Karlsruhe 1966

- /33/ Townsend, A. A.
The Development of Turbulent Boundary-Layers with
Negligible Wall Stress
J. Fluid Mech. 8 (1960), S. 143-155

- /34/ Eppler, R.
Praktische Berechnung laminarer und turbulenter Absauge-Grenzschichten
Ingenieur-Archiv, XXXII. Band, 4. Heft, 1963

- /35/ Truckenbrodt, E.
Neuere Erkenntnisse über die Berechnung von Strömungsgrenzschichten
mittels einfacher Quadratformeln, Teil I/II
Ingenieur-Archiv 43 (1974), S. 136-144, Springer Verlag '74

- /36/ Fernholz, H.
Halbempirische Gesetze zur Berechnung turbulenter Grenzschichten
nach der Methode der Integralbedingungen
Ingenieur-Archiv, XXXIII Band, 1964
- /37/ Schlichting, H.
Boundary-Layer-Theorie
McGraw-Hill Book Company, 7th Edition
- /38/ Schlichting, H.
Grenzschicht-Theorie
Verlag G. Braun, Karlsruhe, Oktober 1964, 5. Auflage
- /39/ Granville, P. S.
The calculation of viscous drag of bodies of revolution
Navy Department, The David Taylor Model Basin, Report 849 (1953)
- /40/ Wieghardt, K.
Zur Berechnung ebener und drehsymmetrischer Grenzschichten mit
kontinuierlicher Absaugung
Ingenieur-Archiv, XXII. Band 1954, S. 368-377
- /41/ Stachniss-Carp, S.
Inkompressible Strömungen um Systeme paralleler Zylinder von
elliptischem Querschnitt
Westdeutscher Verlag 1975
- /42/ Achenbach, E.
Investigations on the Flow through a Staggered Tube Bundle
at Reynolds Numbers up to $Re = 10^7$
Wärme- und Stoffübertragung, Bd. 2 (1969), S. 47-52
- /43/ Idel'chik, I. E.
Handbook of Hydraulic Resistance
National Technical Information Service, Springfield
- /44/ V D I
Druckverlust
VDI-Wärmeatlas, 4. Auflage 1984

- /45/ V D I
Druckverlust bei der Strömung quer zu Rohrbündeln
VDI-Wärmeatlas, 2. Auflage 1974
- /46/ Brandt, H.
Über Druckverlust und Wärmeübertragung in Röhren-Wärmeaustauschern
Dissertation - Technische Hochschule Hannover - April 1934
- /47/ Trippe, G.
Experimentelle Untersuchungen turbulenter Strömungen in axial durchströmten Stabbindeln ohne und mit gitterförmigen Abstandshaltern
KfK - Bericht 2834 (1979)
- /48/ Hermann
entnommen aus VDI-Wärmeatlas, 4. Auflage 1984 /44/
- /49/ Wieselsberger, C.
Versuche über den Widerstand gerundeter und kantiger Körper
AVA Göttingen (entnommen aus /28/)
- /50/ Schubauer - Klebanoff
entnommen aus Schlichting /38/
- /51/ Goldstein, H.
Klassische Mechanik
Akademische Verlagsgesellschaft Frankfurt/M. , 1974, 3. Auflage
- /52/ Blasius, H.
Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten
Forschungsheft Nr. 131 (1913), VDI-Verlag Berlin
- /53/ Nikuradse, J.
Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Röhren
Forschungsheft Nr. 356 (1932), VDI-Verlag Berlin
- /54/ Weizel, R. - Weyland J.
Bewegung der Staupunkte in einer Strömung um N-Hindernisse
Forschungsbericht NRW, Nr. 2378, Westdeutscher Verlag Opladen 1973
- /55/ Strscheletzky, M.
Ein Beitrag zur Theorie des hydrodynamischen Gleichgewichtes von Strömungen
Forschung und Konstruktion, Heft 2, 1957

LEBENS LAUF

Persönliche Daten

Name : B a s l e r
Vorname : Martin, Werner
geboren : am 17. Juli 1949 in Horb am Neckar

Schulausbildung

April 1956 - Besuch der Volksschule in Horb am Neckar
März 1960
April 1960 - Besuch des Gymnasiums in Horb am Neckar
Juni 1969
Juni 1969 Reifeprüfung

Bundeswehr

Oktober 1969 - Grundwehrdienst
März 1971

Praktikum

Juli - Sept. 1969 bei der Firma Ledermann in Horb am Neckar
Juli - Sept. 1971 bei der Firma Brünnninghaus in Horb am Neckar

Studium

WS 1971/72 - Ruhr-Universität Bochum
WS 1978/79 Fachrichtung : Maschinenbau
Oktober 1973 Diplom-Vorprüfung
Januar 1979 Diplom-Prüfung

Anstellungen

1974 - 1979 Studentischer Mitarbeiter
am Lehrstuhl für Reaktortechnik
Ruhr-Universität Bochum
ab 01.03.1979 Wissenschaftlicher Assistent
am Lehrstuhl für Reaktortechnik
Ruhr-Universität Bochum
Lehrstuhlinhaber :
Prof. Dr. rer. nat. A. Ziegler

